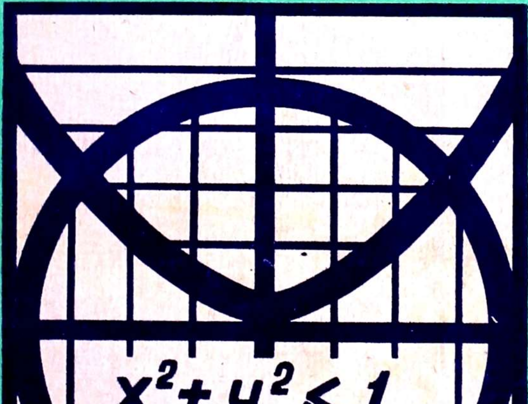
А. Аманалиев

ЭЛЕМЕНТАРДЫК МАТЕМАТИКА БОЮНЧА МАСЕЛЕЛЕР ЖЫЙНАГЫ



ББК 22.10 я 72
А 61

Аманалиев Абазкан.

А 61 Элементардык математика боюнча маселелер жыйнагы: Орто мектептин окуучулары үчүн. — Ф.: Мектеп, 1987. — 84 бет.

Китепчеде математика боюнча маселелер чыгарылыштары менен берилген. Жогорку класстын окуучуларына арналат.

А $\frac{4306020400-121}{М\ 452\ (17)-87}$ 1.87 ББК 22.10 я 72

Гүлзара

КИРИШ СӨЗ

Азыр илим менен техниканын өсүшүнүн учуру болгондуктан математиканын ролу жогору экендиги баарыбызга белгилүү. Ошондуктан математиканы окутуу да, үйрөнүү да, колдоно билүү да эң жогорку талапты коёт. Партия менен өкмөт билим алууну жана аны турмушка колдоно билүүнү адамдардан, айрыкча жаштардан катуу талап кылат.

КПССтин XXVI съездинин жана анын кийинки пленумдарынын, б. а. июнь (1983-ж.), апрель (1984-ж. жана 1985-ж.) чечимдеринде жаштарга азыркы учурдун талабына ылайык билим берүү жөнүндө ачык көрсөтүлгөн. Ушуга ылайык окутууну жана тарбиялоону өлкөдө түп тамырынан бери кайра куруу керек болгондуктан, мектеп реформасы кабыл алынды. Мектеп реформасы жаштарга терең жана туруктуу билим берүү менен аларга кесип тандоого багыт берүүнү талап кылып олтурат. Бул багытта математика мугалимдерине жүктөлгөн милдет аз эмес. Анткени ар бир адам, кандай гана кесиптин ээси болбосун илимий-техникалык революциянын ушундай дүркүрөп өсүп турган мезгилинде математиканы жакшы билиши зарыл. КПСС Борбордук Комитетинин Генеральный секретары М. С. Горбачев Ленинград шаарындагы партиялык активдеги сүйлөгөн сөзүндө азыркы учурда илимий-техникалык прогрессти тездетүү жана аны колдонуу жөнүндө кеңири токтолгон. Ал эми математика боюнча жаштарга терең билим берүү үчүн класстан тышкаркы иштерди (факультативдик сабактарды, кружокторду) көбүрөөк жүргүзүү керек. Ошондуктан бул жыйнакты жогорку класстын окуучуларына жана математика мугалимдерине жардам катары түздүм жана анда өзүмдүн мектепте көп жылдан берки жүргүзгөн иштеримдин айрымдарын баяндадым. Жыйнакты түзүүдө математика боюнча адабияттарды пайдаландым. Маселелер жөнөкөйдөн татаалга карата жайгаштырылды. Мугалим бул китепчедеги маселелерди математикага кызыккан окуучуларга сунуш кылса да болот.

Жыйнак арифметика жана алгебра бөлүмүнөн турат. Алгебра боюнча маселелер жана формулалар курстун бөлүмдөрүнө ылайык тандалып алынды. Жыйнактагы маселелерди адегенде чыгарылышын колдонбостон өз алдынча чыгарып, андан кийин анын чыгарылышын пайдаланууну сунуш кылабыз.

АРИФМЕТИКА

§ 1. Сандардын бөлүнүүчүлүгү

1. Эгерде үч сандын суммасы так сан болсо, анда кошулуучулардын жок дегенде бирөө так сан болорун далилдегиле.
2. Удаалаш үч натуралдык сандын суммасы 3 кө бөлүнөрүн далилдегиле.
3. Эгерде эки сандын суммасы кандайдыр бир санга бөлүнсө, анда алардын ар бири ушул санга бөлүнөт деген корутунду туура эместигин далилдегиле.
4. Эгерде эки санды үчүнчү санга бөлгөндө, бирдей калдыктарды берсе, анда алардын айырмасы да ошол санга бөлүнөт.
5. $222^{333}+333^{222}$ суммасы 13 кө бөлүнөрүн далилдегиле.
6. Складга ар түрдүү салмактагы конфета салынган 6 ящик конфета алып келди. Ящиктерди тартканда ар бири 15, 16, 18, 19, 20 жана 31 кг дан болуп чыкты. Ошол эле күнү эки магазин 5 ящигин алып кетти. Бирок биринчи магазин экинчиге караганда салмагы боюнча 2 эсе ашык алгандыгы аныкталды. Магазинде кайсы ящиктеги конфета калган?
7. $6^{2n}-1$ саны 35 ке бөлүнөрүн далилдегиле, мында n каалагандай натуралдык сан.
8. $333^{444}+444^{333}$ суммасы 5 ке, 1811 ге жана 9055 ке бөлүнөрүн далилдегиле.
9. n дин ар кандай жуп маанисинде

$$n^4+4(4+2n^2)$$

туюнтмасы 16 га бөлүнөрүн далилдегиле.

10. Эгерде 1331 санынын ар бир эки цифрасынын арасына бирдей сандагы нөлдү жазсак, анда кандайдыр сандардын кубу алынарын далилдегиле.
11. Ар түрдүү x, y жана z үч цифраларынан бардык мүмкүн болгон үч орундуу сандар түзүлгөн. Бул сандардын суммасы ар бир цифрасы x болгон үч орундуу сандан үч эсе чоң. Бул цифраларды тапкыла. (Болгариянын олимпиадага берилген маселесинен.)

12. Асан $(1900+a)$ жылы, c айда, b күнү туулган жана ал 1973-жылы d жашка толот. Эгерде $abcd=76096$ болсо, анда туулган датасын тапкыла.

АЛГЕБРА

§ 2. Алгебралык туюнтмаларды өзгөртүү

13. $4^{n+1}n-(n+1)\,4^n+1$ туюнтмасы 9 ка бөлүнөөрүн далилдегиле (n — натуралдык сан).

14. Далилдегиле:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

15. n дин так маанилеринде

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$ барабардыгынан,

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$$ барабардыгы келип чыгарын көрсөткүлө.

16. Эгерде $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ болсо, анда туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

$$x\sqrt[n]{1+\sqrt[n+1]{a^n x^{-n}}}+a\sqrt[n]{1+\sqrt[n+1]{x^n a^{-n}}}\ .$$

§ 3. Биринчи даражалуу теңдемелер жана теңдемелер системасы

Теңдемелерди чыгаргыла:

17. $$\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-13}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}.$$

18. $|1-x|-|x+3|=|x+2|$.

19. Системаны чыгаргыла:

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^2 \\ x+by+b^2z=b^3, \\ x+cy+c^2z=c^3. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$$

21. $\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

§ 4. Жогорку даражалуу теңдемелер

22. Теңдемени чыгаргыла:

$$x^4+2x^3-x-a=0.$$

23. $(x+1)^6+20=9(x+1)^2$.

§ 5. Иррационалдуу теңдемелер

24. x тин кандай чыныгы маанисинде

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

барабардыгы орун алат, мында тамырлардын оң гана мааниси каралат.

25. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1.$$

§ 6. Сан удаалаштыгы жана прогрессиялар

26. $1, \sqrt{2}$, 2 сандары бир эле арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү боло алышабы?

27. Ар кандай арифметикалык прогрессия үчүн

$$S_{n+3}-S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=0$$

барабардыгы орун аларын далилдегиле.

28. Сумманы тапкыла:

$$S_1=2^2+4^2+\ldots+(2n)^2,$$
$$S_2=1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2.$$

29. 17, 20, 23, 26, ... жана 16, 20, 24, 28,... арифметикалык прогрессиялардын кандайдыр бир мүчөлөрү барабар. Биринчи жүз бирдей мүчөлөрүнүн суммасын тапкыла.

30. 2, 9 жана 17 сандары геометриялык прогрессиянын мүчөлөрү боло алышабы?

31. Арифметикалык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсүнүн квадраттары геометриялык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү боло турган шартты тапкыла.

32. Тапкыла: $\underbrace{S = 7 + 77 + 777 + \ldots + 777\ldots7}_{n \text{ кошулуучу}}$.

33. Өсүүчү геометриялык прогрессиянын удаалаш беш мүчөсүнүн суммасы, бул суммага кирген мүчөлөрдүн үчүнчүсүнөн, 19 эсе чоң. Эгерде анын кандайдыр бир мүчөсү (m-си) бирге барабар болсо, бул прогрессияны тапкыла.

34. Арифметикалык жана геометриялык эки прогрессияны тапкыла. Эгерде бул прогрессиялардын биринчи мүчөлөрү барабар, арифметикалык прогрессиянын биринчи эки мүчөсүнүн суммасы геометриялык прогрессиянын биринчи эки мүчөсүнүн суммасынан, биринчи мүчөсүнүн үч эселенгенчелигинен чоң, ал эми биринчи үч мүчөлөрүнүн суммалары баарбар экендиги белгилүү.

35. Арасындагы аралыгы 25 см ге барабар болгон A жана B чекиттеринен бир багыт боюнча бирдей убакытта эки нерсе жүрө баштады, бирок, A дан чыккан биринчи нерсе B дан чыккан нерсени кууп жетет. Биринчи нерсе өзүнүн жүрүшүнүн биринчи секундасында 7 см, ал эми кийинки ар бир секундасында 2 см ден артык өтөт; экинчи нерсе болсо биринчи секундасында 4 см, ал эми ар бир кийинки секундасында 1 см ден артык өтөт. Канча убактан кийин биринчи нерсе экинчисин кууп өтөт?

§ 7. Көрсөткүчтүү жана логарифмалык теңдемелер

36. Эгерде $a^2+b^2=7ab$ болсо, анда

$$\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b)$$

болорун далилдегиле.

37. Эгерде $a>0$, $b>0$, $ab\neq1$ жана $a\neq1$ болсо, анда $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$ экендигин далилдегиле.

38. Эгерде a, b жана c сандары геометриялык прогрессиялардын удаалаш мүчөлөрү болушса, анда

$$\frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} = \frac{\log_a N}{\log_c N}$$

болорун далилдегиле ($N\neq1$).

39. Далилдегиле: $\log_b a = \log_{b^n} a^n$.

40. Теңдештикти далилдегиле:

$$\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x \quad \log_b x}{\log_b x - \log_a x}.$$

41. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}$

экендигин далилдегиле.

42. $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

экендигин көрсөткүлө.

43. Теңдемени чыгаргыла:

$$5^{x} \sqrt[x+1]{8^{x}} = 100.$$

44. $3^{|2-x|} \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^{x} = 2 \cdot 3^{x}$.

45. Теңдеме

$$1 + \log_b(2\log_{10} a - x) \log_x b = \frac{2}{\log_b x}$$

жок дегенде бир чыгарылышка ээ болсун үчүн a жана b сандары кандай шартты канааттандырууга тийиш? Теңдеменин бардык тамырларын тапкыла.

46. $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$

теңдемеси $x > 1$ барабарсыздыгын канааттандыруучу бир тамырга ээ болорун көрсөткүлө жана бул тамырды тапкыла.

Теңдемени чыгаргыла:

47. I. $3^{\log_x 3} x^{\log_3 x} = 9$.

II. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$.

48. I. $x^{\log_x 2(x^2-1)} = 5$.

II. $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = a^{\log_{a^2} 4}$ (мында $a > 0$).

49. $\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$.

50 $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 (x-3)} = \frac{1}{x}$.

Теңдемелер системасын чыгаргыла:

51. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

52. $\begin{cases} (x-y)^{\lg(x+1,5)} = 0,2, \\ \sqrt[\lg(x-y)]{2x+3} = 0,1. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^z = y^{\sqrt[3]{y}}, \\ y^z = \sqrt[3]{x} \end{cases}$

54. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$

55. $\begin{cases} a^x b^y = ab, \\ 2 \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = x^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$

57. $\begin{cases} \log_2(y - x) - \log_8(3y - 5x) = 0, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

58. $\begin{cases} |\log_2(x + y)| + |\log_2 (x - y)| = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$

59. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} x = 1, \\ b^{\log_{\sqrt{b}} \sqrt{y}} + x^2 = 2a. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 7 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{y+z-x+1} = 9, \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{y+z-x} = 27, \\ \lg (x + y + z) - 3 \lg x = \lg (yz) + \lg 2. \end{cases}$

61. $\begin{cases} x^{x+y} = y^n, \\ y^{x+y} = x^{2n} y^n \end{cases}$ (мында $x > 0,\ y > 0,\ n > 0$).

62. $\begin{cases} (3x + y)^{x-y} = 9, \\ \sqrt[x-y]{324} = 18 x^2 + 12 xy + 2y^2. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y. \end{cases}$

Мында $x>0$, $y>0$, $a>0$, $b>0$.

64. $\begin{cases} \left[\left(\sqrt[9]{5}\right)^{2x}\right]^{3y} = 5^8, \\ \left[7777^{(x-y-1)}\right]^{x^2+6y^2-60} = 1. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 x - \log_3 y = 1. \end{cases}$

66. $\begin{cases} 5^{\lg x} - 3^{\lg y} = 0, \\ (3x)^{\lg 3} - (5y)^{\lg 5} = 0. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x^2 + 2^x - 2y = 1, \\ \log_{(2^x - y)} x + y + 1 = 1 \end{cases}$

68. $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

системасы бир гана анык чыгарылышка ээ боло турган a нын анык маанисин тапкыла.

70. $\begin{cases} \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \ (x > 0) \end{cases}$

системасы бир гана анык чыгарылышка ээ боло турган a менен b нын анык маанилерин тапкыла.

71. $\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$

системасы жок дегенде бир анык чыгарылышка ээ боло турган a нын анык маанилери жана b нын ар кандай маанилери кандай санда болууга тийиш?

72. Эгерде a нын маанилеринде жана b нын каалагандай анык маанилеринде төмөнкү система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

бир гана анык чыгарылышка ээ болсо, анда a нын кандай анык маанилери болууга тийиш?

73. Системаны чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^a = y^b, \\ \log_c \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_c x}{\log_c y}. \end{cases}$$

§ 8. Комбинаторика жана Ньютондун биному

74. 1, 2, 2, 2, 3 цифраларынан канча ар түрдүү беш орундуу сандарды түзүүгө болот?

75. 1, 2, 2, 3 цифраларынан канча үч орундуу ар түрдүү сандарды түзүүгө болот?

76. 1, 2, 3, ..., 8 цифраларынан, бирок 2 цифрасы ар бир санда үчтөн көп эмес кайталанбагандай кылып, канча N орундуу сан түзүүгө болот?

77. Томпок көп бурчтуу 10 бурчтукка канча түрдүү диагональ жүргүзүүгө болот?

78. Ар бир киши эч болбогондо бирден буюм алгандай кылып, 5 буюмду (ар түрдүү) канча түрдүү жол менен үч адамга бөлүштүрүүгө болот?

79. Ящиктеги 15 шар 1 ден 15 ке чейин катары менен номерленген. Мындан үч шар алып чыгуу керек. Номерлеринин мүмкүн болгон комбинациясынын санын аныктагыла.

80. 50! санынын акыры канча нөл менен бүтөт?

81. Тегиздиктеги n чекиттердин үчөө бир түз сызыкта жатпагандай кылып жайгаштырылган. Бул чекиттер аркылуу канча ар түрдүү түз сызыктарды жүргүзүүгө болот?

82. Тегиздикте берилген n чекиттер бардык мүмкүн болгон жолдор менен эки түз сызык өз ара эч бир параллель болбогондой жана үч түз сызык бир чекитте эч бир кесилишпегендей кылып түздөн түз чектелбеген түз сызыктар менен туташтырылган. Берилген n чекити кирбеген, кесилишүүчү чекиттердин санын эсептегиле.

83. Бир кишиде математика боюнча 7, экинчисинде 9 китеп бар. Биринчиси эки китебин экинчисинин эки китебине канча жол менен алмаштырат?

84. 1, 2, ... 3 цифраларынын жардамы менен эч бир кайталабастан канча беш орундуу ар түрдүү сан түзүүгө болот?

85. 15 кишиден, 3 кишиден түзүлгөн делегацияны канча ар түрдүү жолдор менен шайлоого болот?

86. Мектептин 9-классынын окуучулары 14 ар түрдүү предмет окушат. Күнүнө ар түрдүү 6 предметтен окуса, сабактын расписаниесин канча жол менен түзүүгө болот?

87. Чаек, Жумгал деген сөздөрдүн арииптеринен канча ар түрдүү которулуштуруу түзүүгө болот?

88. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}$ биномунун ажыратуусунун бардык рационалдуу мүчөсүн тапкыла.

89. $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{7}$ биномунун ажыратуусунун иррационалдуу болбогон мүчөсүн тапкыла.

90. Эгерде $(x+x^{\lg x})^{5}$ ажыратуусунун үчүнчү мүчөсү 10^{6} га барабар болсо, x ти тапкыла.

91. 1, 2, 3, ... 100 сандарынан мүмкүн болгон бардык түгөй көбөйтүндүлөр түзүлгөн. Бул сандардын ичинде 3 кө бөлүнүүчү канча сан бар?

92. Эгерде $p_1, p_2, ..., p_n$ ар түрдүү жөнөкөй сандар болсо, анда

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

санынын бөлүүчүсүнүн санын аныктагыла.

§ 9. Математикалык индукция методу

93. Айырмасы d болгон арифметикалык $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ прогрессиянын каалаган мүчөсү

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

ге барабар экендигин далилдегиле.

94. Эгерде p жөнөкөй сан болсо, анда a нын ар кандай бүтүн маанисинде $a^p - a$ нын айырмасы p га бөлүнөрүн далилдегиле (Ферманын теоремасы).

95. Далилдегиле:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}.$$

96. Барабардыкты далилдегиле:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

97. Далилдегиле:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

§ 10. Түзүүгө маселелер чыгаруу

98. A пунктунан Волга боюнча жогору карай моторлуу кайык жөнөтүлдү, ал эми ошол эле убакта B пунктунан агым боюнча сал жөнөдү. a сааттан кийин алар жолугушту да, токтолбостон жөнөштү. B пунктуна моторлуу кайык жетип, токтобостон кайра жөнөп, салды A пунктунан кууп жетти. Кайыктын өздүк ылдамдыгын ар дайым өзгөргөн жок деп эсептегиле. Кайык жана сал канча убакыт сүзүшкөн?

99. Тракторчулардын эки бригадасы бирге иштеп, 254 га аянтка үрөндү 117 саатта толук сээп бүтүрүүгө тийиш. Алардын бирөө 39 га га сепкенден кийин, өндүрүмдүүлүгү 6, 25 га/саатка өстү. Ал эми экинчи бригада дагы 39 га га үрөн сепкенден кийин, анын өндүрүмдүүлүгү дагы 1,5 га/саатка көбөйдү. Ошонун натыйжасында аянтка үрөндү $t=55$ саатта сээп бүттү. Ар бир бригаданын өндүрүмдүүлүгүн тапкыла. Масе-

ле чыгарылышка ээ боло турган t нын бардык маанисин тапкыла.

100. Бир калыпта кыймылда болгон шар, тынч турган шарды борбордук согуу менен түртөт. Түртүүдөгү жылуулуктун 25% и кинетикалык энергияга өтөт. Кыймылдагы шар өзүнүн мурунку багыты боюнча башталгыч ылдамдыгынан 50% тен кем болбогон ылдамдык менен кыймылдаса, шарлардын массаларынын арасында кандай байланыштар болушу керек?

101. Бийиктиктери бирдей h жана негиздери бирдей l болгон эки тепкичке килем төшөлгөн. Эгерде тепкичтердин бирөөнүн саны $n_1=20$ жана экинчисинин саны $n_2=26$ болсо, анда бул килемдердин узундуктары бирдей болобу?

102. Терүүчүнүн жана корректордун күнөөсү менен алгебралык туюнтманы эсептөөгө берилген $x^2\times0,...$ ни эсептегиле деген маселе $x\times20,...$ эсептегиле деп басылып калган. Мында x — төрт орундуу жуп бүтүн сан, ал эми үтүрдөн кийинки үч чекит чектүү ондук бөлчөк.Ката басуу эсептөөгө эч кандай таасирин тийгизген эмес да, эки учурда тең бирдей эле жооп келип чыккан. x ти жана ондук бөлчөктү тапкыла.

103. Үч цифра берилген. Бул үч цифрадан ар кандай комбинация менен түзүлгөн сандардын суммасы 2886 га барабар. Эгерде берилген цифралардын маанилеринин кемүү тартиби боюнча жайгаштыруудан пайда болгон сандан, ушул эле цифралардан түзүлгөн, бирок, тескери тартипте жазуудан пайда болгон санды кемитсек, анда айырмасы 495ке барабар болот. Бул цифралардын арасында нөлү жок деп эсептеп, бул цифраларды тапкыла.

104. Берилген санды анын цифраларынын суммасына бөлгөндө биринчи цифрасы берилген сандын биринчи цифрасынан 3 кө кичине, ал эми акыркы цифрасы изделүүчү сандын акыркы цифрасынан 4 кө чоң болгон эки орундуу сан келип чыгуучу берилген үч орундуу санды тапкыла. Цифраларынын суммасын туюндуруучу сандын акыркы цифрасы изделүүчү сандын биринчи цифрасына туура келет.

105. Мектептин залында бардыгы 100 гө жакын стул болгон. Ал эми отличниктердин райондук слетуна белгиленгенден көбүрөөк келишти. Ошондуктан орунду эки эселентсе, анда орундун $\frac{1}{12}$ и бош калат. Слетко канча окуучу келген?

106. 6-июнь 1966-жыл дегенди 6. 6. 66 деп жазууга болот. Мында жазуу бир гана 6 цифрасы менен жүргүзүлгөн. Жүз жылда Күндү, Айды жана жылдын акыркы эки цифрасын бир гана цифра менен канча жолу жазууга болот жана кандай жазылат?

107. Атам Эркинбекке: «Кызык, эгерде менин жашым менен сенин жашыңды туюндуруучу сандардын ар биринин цифраларын тескери тартипте өзгөртсө, анда менин жашым менен сенин жашыңдын көбөйтүндүсү өзгөрбөйт. Андагы бир гана өкүнүч сенин да, менин да жашым 11 ге бөлүнбөйт» — деди.

— «Анын кандай өзгөчөлүгү бар экен» — деди чоң атам.

— «Эгерде цифраларынын ордун алмаштырсак, анда менин жана Эркинбектин жашынын көбөйтүндүсү өзгөрбөйт» — деди атам. Анда чоң атамдын атасы ойлонуп туруп, «Мени менен сендеги өкүнүч Эркинбек, жаштарыбыздын арасындагы ушундай эле байланыш» деп айтты. Эркинбектин жашы канчада?

108. Алымын кандайдыр бир санга чоңойткондо жана бөлүмүн ошол эле санга көбөйткөндө, чоңдугу өзгөрбөй турган $\frac{1}{2}$ ден чоң болгон дурус бөлчөктү табыла?

109. Жез, калай жана цинк үчөөнөн турган аралашма берилген. Биринчи аралашмага салмактарынын катышы 3:5 катышында болгон жез менен калай, экинчи аралашмага салмактары 1:2 катышында болгон калай менен цинк, үчүнчү аралашмага салмактары 2:3 катышында болгон жез менен цинк кошулган. Салмактарынын катышы 3:5:2 болгондой жез, калай жана цинктин жаңы аралашмасын алуу үчүн, ар бир аралашмаларды кандай катышта алуу керек?

ЖООПТОР ЖАНА ЧЫГАРЫЛЫШТАР

1. Бул маселени чыгаруу үчүн төмөндөгү учурларга токтолобуз.

1) Эгерде үч сан тең жуп: $2m$, $2n$ жана $2k$ сандар болсо, анда алардын суммасы

$$2m+2n+2k=2(m+n+k)$$

жуп сан болот.

2) Эгерде экөө, $2m+1$ жана $2n+1$ сандары так, ал эми бирөө $2k$ жуп болсо, анда алардын суммасы

$$(2m+1)+(2n+1)+2k=2(m+n+k)+2$$

жуп сан болот.

3) Эгерде бирөө $2m+1$ так, ал эми $2n$ жана $2k$ жуп болсо, анда суммасы

$$(2m+1)+2n+2k=2(m+n+k)+1$$

так сан болот.

4) Эгерде үчөө тең $2m+1$, $2n+1$ жана $2k+1$ так сандар болушса, анда алардын суммасы

$$(2m+1)+(2n+1)+(2k+1)=2(m+n+k)+3$$

так сандар болушат.

Ошентип, кошулуучулардын бирөө же үчөө тең так сан болгондо, үч сандын суммасы так сан болот.

2. Удаалаш үч натуралдык сандар: n, $n+1$ жана $n+2$ берилди. Анда $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ келип чыгат. Бул сан 3кө бөлүнөт.

3. Эгерде кошулуучулардын ар бири кандайдыр бир санга бөлүнсө, анда алардын суммасы да ошол санга бөлүнөрү бизге белгилүү, б. а. $a=pn$, $b=pq$ болсо, анда $a+b=p(n+q)$ болот. Ал эми бизге берилген маселе ушул теореманын (сүйлөмдүн) тескериси. Биз ушул тескери сүйлөмдүн туура эмес экендигин далилдөөгө тийишпиз. Маселенин шарты боюнча $a+b=pn$, мында p — бөлүүчү, n — тийинди. a менен b сандары p га бөлүнсө, анда $a=pq+r_1$, $b=ps+r_2$ болсун дейли, мында r_1 жана r_2 калдыктар. Анда $a+b=pn$ ге a жана b нын маанисин койсок,

$$pq+r_1+ps+r_2=pn,$$
$$r_1+r_2=p(n-q-s).$$

Мындан, r_1+r_2 нин суммасы да p га бөлүнөт деген жыйынтыкка келебиз. Демек, a жана b сандарынын суммасы кандайдыр бир санга бөлүнсө, анда алардын ар бири ошол санга дайыма эле бөлүнө бербейт.

4. a, b жана c үч саны берилип, маселенин шарты боюнча $a=cp+r$, $b=cq+r$ жана $a>b$ болсун дейли. Анда $a-b=c(p-q)$ болот. Демек, $a-b$ да c га бөлүнөт.

5. Берилген сумманы төмөндөгүдөй өзгөртүп жазууга болот:

$$222^{333}+333^{222}=(111\cdot 2)^{333}+(111\cdot 3)^{222}=$$
$$=111^{333}\cdot 2^{333}+111^{222}\cdot 3^{222}=111^{222}(111^{111}\cdot 8^{111}+9^{111})=$$
$$=111^{222}[(111\cdot 8)^{111}+9^{111}]=111^{222}(888^{111}+9^{111}).$$

Даражалары так сан болгондуктан

$$888^{111}+9^{111}$$

суммасы көбөйтүүчүлөргө ажырайт. Анын көбөйтүүчүлөрүнүн бирөө

$$(888+9)$$

болот. Бул сумма 13 кө бөлүнөт.
Демек,

$$222^{333}+333^{222}$$

13 кө бөлүнөт.

6. Эгерде биринчи магазин экинчисине караганда эки эсе көп алган болсо, анда экөө алган конфеталардын салмагынын суммасы 3 кө бөлүнөт. Бардык конфеталардын салмагынын саны:

$$15+16+18+19+20+31=119.$$

Бул санды 3кө бөлсөк, калдыгы 2 болот. Демек, складда калган салмакты 3кө бөлгөндө, калдыгы 2 боло турган, б. а. складда салмагы $3n+2$ саны менен туюнтула турган ящик калган. Бул шартты канааттандыра турган ящик 20 кг дык ящик болот. Ошентип, магазиндер 99 кг конфета алышкан. Биринчиси 66 кг, экинчиси 33 кг. Биринчиси: 16, 19 жана 31 кг дык, экинчиси: 15 жана 18 кг дык ящиктерди алышкан.

7. Берилген туюнтманы өзгөртүп,

$$6^{2n}-1=36^{n}-1$$

деп жазабыз. Бул n дин каалаган ар кандай маанисинде эки көбөйтүүчүгө ажырайт. Анын бирөө $36-1=35$. Демек, $6^{2n}-1$ саны 35 ке бөлүнөт.

8. Берилген сумманы төмөндөгүдөй өзгөртүп жазабыз. Анда

$$333^{444}+444^{333}=(111\cdot 3)^{444}+(111\cdot 4)^{333}=111^{444}\times$$
$$\times 3^{444}+111^{333}\cdot 4^{333}=111^{333}\ (111^{111}\cdot 3^{444}+4^{333})=$$
$$=111^{333}\ [(111\cdot 3^{4})^{111}+(4^{3})^{111}]=111^{333}\times$$
$$\times(8991^{111}+64^{111})$$

болот. Бул көбөйтүндүдөгү кашаанын ичиндеги сумма эки көбөйтүүчүгө ажырайт. Анын бирөө $8991+64=$ $=9055=5\cdot 1811$ болот. Ошентип, берилген сандардын суммасы 5 ке, 1811 жана 9055 ке бөлүнөт.

9. Берилген туюнтманы:

$$(n^{4}+4(4+2n^{2})=n^{4}+2\cdot 4n^{2}+4^{2}(n^{2}+4)^{2}$$

деп жазабыз. Маселенин шарты боюнча n жуп сан, ошондуктан $n=2k$ десек, анда $n^{4}+4(4+2n^{2})=$ $=16(k^{2}+1)$
болот. Демек, бул 16 га бөлүнөт.

10. Сандын цифраларынын арасына n нөл жазалы, анда сан

$$\underbrace{100\ldots0}_{n}\quad\underbrace{300\ldots0}_{n}\quad\underbrace{300\ldots01}_{n}$$

түрүнө келет. Ал эми бул сандын цифралары $3n+4$ болот, себеби $\underbrace{00\ldots01}_{n}=n+1$

болсо, анда

$$(n+1)+(n+1)+(n+1)+1=3n+4$$

болот. Анда сан

$$100\ldots0300\ldots0300\ldots01=10^{3(n+1)}+3\cdot10^{2(n+1)}+$$
$$+3\cdot10^{n+1}+1=(10^{n+1}+1)^3.$$

Демек, бул n дин ар кандай натуралдык маанисинде туура болот, n ге ар кандай ($n=0$ дөн башка) маанилерди берип, текшерип көрүүгө болот. Мисалы, $n=1$ (бул сандын арасына бирден гана нөл жазуу дегендикке жатат) болсо, анда

$$1030301=101^3=(100+1)^3=(10^2+1)^3=10^6+$$
$$+3\cdot10^4+3\cdot10^2+1;$$

$n=2$ болгондо, $1003003001=(10^3+1)^3=10^9+3\times$
$\times10^6+3\cdot10^3+1$ ж. б.

11. Маселени чыгарганда эки учурдун болушу мүмкүн.
а) Цифралардын бирөө да нөлгө барабар эмес болсун дейли.
Анда маселенин шартын

$$\overline{xyz}+\overline{xzy}+\overline{zxy}+\overline{zyx}+\overline{yxz}+\overline{yzx}=3\cdot\overline{xxx}$$

деп жазууга болот. Муну жөнөкөйлөтүп,

$$222x+222y+222z=333x$$

же

$$222z+222y=111x,$$
$$2(y+z)=x.$$

Мындан x тин жуп экендиги жана y менен z тер нөлгө барабар эмес жана бирдей эле учурда бирге да барабар болбойт. Ошондуктан, $y+z>2$, анда $x>4$ болот. Демек, $x>4$ болгондо жуп сан болот да же 6, же 8 болууга тийиш. Муну текшерип көрөбүз:

$x=6$ болсо, $y+z=3$ болот да $y=2$, $z=1$ чыгат.
$x=8$ болсо, $y+z=4$ болот да $y=3$, $z=1$ чыгат.
y жана z тин экөө тең бирдей эле мааниге ээ болгон-

дуктан, кайсы цифраны z, кайсынысын y менен белгилөөнүн эч кандай айырмасы жок.

б) x цифрасы эч качан нөл боло албайт, анткени маселенин шарты боюнча y менен z тин жок дегенде бирөө, бир учурда нөл боло албайт. Нөл болуп калышы да мүмкүн.

$y=0$ же $z=0$ болот. Мисалы, $y=0$; $z\neq 0$ дейли, анда

$$\overline{xoz}+\overline{xzo}+\overline{zxo}+\overline{zox}=3xxx$$

же

$$211x+211z=333x;\quad 211z=122x.$$

Ал эми 211 жана 122 сандары өз ара жөнөкөй сандар болгондуктан 0 менен 9 дун арасынан барабардыкты канааттандыра турган x жана z тин мааниси табылбайт. Эгерде $z=0$ десек, анда дагы эле ушундай абал пайда болот. Ошентип, экинчи учурдун болушу мүмкүн эмес. Демек, изделүүчү цифралар жана сандар:

1) $x=6$, $y=2$, $z=1$ болсо, анда 621 болот.
2) $x=6$, $y=1$, $z=2$ болсо, анда 612 болот.
3) $x=8$, $y=3$, $z=1$ болсо, анда 831 болот.
4) $x=8$, $y=1$, $z=3$ болсо, анда 813 болот.

12. Маселенин шарты боюнча Асан 1973 кө чыккандыктан

$$a+d=73$$

болот. Себеби, туулган жылынын акыркы эки цифрасынан түзүлгөн санга жашын кошсок, ошол жашка толгон жылынын акыркы эки цифрасы чыгат жана

$$1\leqslant b\leqslant 31;\quad 1\leqslant c\leqslant 12$$

болот. Анткени бир айда 30 же 31 күн, бир жылда 12 ай болот. Ал эми маселенин акыркы шартын

$$abcd=76096=2^6\cdot 29\cdot 41$$

деп жазабыз. $abcd$ санынын бөлүүчүлөрүнөн бөлүүчүсүз 41 ди 73 түн суммасына кошууга болбойт, анда a же d нын бирөө 41 ге барабар болушу керек. Эгерде $a=41$ болсо, анда $d=32$ болот, анткени $41+32=73$ жана $32=2^5$, мындан $b=29$ жана $c=2$ келип чыгат. Эгерде $d=41$ болсо, анда $a=32$, $b=29$ жана $c=2$ болот. Бул алынган сандарды текшерип көрөбүз. Биринчи учур боюнча $d=32$, $a=41$, $b=29$, $c=2$ деп, Асан 1941-жылы 29-февралда туулган, 1973-жылы 41 жашка чыккан болот. Бирок, календарь боюнча

1941-жылдын февралы 28 күн болгон. Ошентип, $a \neq 41$. Демек, Асан 1932-жылы 29-февралда туулган.

13. Берилген туюнтманы

$$4^{n+1}n-(n+1)\,4^{n}+1=4n\cdot 4^{n}-n\cdot 4^{n}-4^{n}+1=3n\times$$
$$\times 4^{n}-3n+3n-4^{n}+1=3n\,(4^{n}-1)-(4^{n}-3n-1)=3n(4-1)$$
$$(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+1)-(4^{n}-3n-1)=9n\,(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+$$
$$+1)-(4^{n}-3n-1)$$

өзгөртүп жазабыз. Андан кийин

$$4^{n}=(3+1)^{n}$$

деп алып, Ньютондун биному боюнча ажыратып жазып, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$4^{n}=(3+1)^{n}=3^{n}+n\cdot 3^{n-1}+\ldots+3n+1,$$

анда

$$4^{n}-3n-1=3^{n}+n\cdot 3^{n-1}+\ldots+3n+1-3n-1=3^{n}+$$
$$+n\cdot 3^{n-1}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 3^{2}=9(3^{n-2}+n\cdot 3^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2!}$$

болот. Бул маанини (1) барабардыкка койсок,

$$4^{n+1}n-(n+1)\,4^{n}+1=9\left[n(4^{n-1}+4^{n-2}+m+1)-(3^{n-2}+\right.$$
$$\left.+n\cdot 3^{n-3}+\ldots+\frac{n\,(n=1)}{2!}\Big)\right].$$

Бул барабардыктан n дин ар кандай натуралдык маанилеринде туюнтма 9 га бөлүнөрү белгилүү.

14. Берилген туюнтманы

$$u=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$$

деп белгилеп алабыз. Эми эки жагын тең кубга көтөрүп, жөнөкөйлөтсөк,

$$u^{3}=12+3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right).$$

Кашаанын ичиндеги сумма белгиленген боюнча u га барабар. Ал эми тамырлардын көбөйтүндүсү

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=\sqrt[3]{36-\sqrt{\frac{847}{27}}}=\frac{5}{3}.$$

Буларды (2) барабардыктагы ордуна коюп,

$$u^3-5u-12=0$$

теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдемени чыгарабыз. Адегенде көбөйтүүчүгө ажыратабыз (же куб теңдемени чыгаруу боюнча чыгарабыз):

$$u^3-3u^2+3u^2-9u+4u-12=0,$$
$$(u-3)\ (u^2-3u+4)=0,$$
$$u=3.$$

$u^2-3u+4=0$ чыныгы чыгарылышка ээ болбойт. Ошентип, берилген сумманын 3 кө барабар экендиги далилденди.

15. Эң мурда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

барабардыгын жөнөкөйлөтүп алабыз. Барабардыктын оң жагындагы мүчөлөрүн сол жагына чыгарып, өзгөрткөндөн кийин муну алабыз:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz(x+y+z)}=0.$$

Мындан

$$(x+y)\ (x+z)\ (y+z)=0 \qquad (1)$$

келип чыгат. Ал эми бул көбөйтүндү нөлгө барабар болсун үчүн $x=-y$; $y=-z$; $z=-x$ болушу керек. Ал эми чындыгында ушундай болот. Ушул эле сыяктуу,

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$$

барабардыгын өзгөртүп жазабыз, б. а.

$$\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)-\frac{1}{x^n+y^n+z^n}=\frac{(x^n+y^n)(x^n+z^n)(y^n+z^n)}{x^ny^nz^n(x^n+y^n+z^n)}=0.$$

Мындан n так болгондо

$$(x^n+y^n)\ (x^n+z^n)\ (y^n+z^n)=0 \qquad (2)$$

келип чыгат. Анткени n так сан болгондо, $x=-y$ болсо, анда $x^n=-y^n$ болот да, $x^n+y^n=-y^n+y^n=0$ болот. Ошентип, (2) барабардык нөлгө айланат. Ал эми n жуп сан болгондо, $x=-y$ болсо, анда $x^n=y^n$ болот да, $x^n+y^n=x^n+x^n=2x^n=2y^n$ болот. Демек, анда көбөйтүндү (2-барабардык) нөл болбойт. Ошентип, n так болгондо, сунуш кылынган барабардык далилденди.

16. Эң мурун биринчи кошулуучуну жөнөкөйлөтүп,

$$x\sqrt{1+\sqrt[n+1]{a^n x^{-n}}}=x^{\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

экинчиси $\quad a\sqrt{1+\sqrt[n+1]{x^n a^{-n}}}=a^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}\right)$

болот. Бул эки барабардыкты кошуп, жөнөкөйлөтүп, x тин маанилерин коюп, өзгөртүп табабыз:

$$x\sqrt[n]{1+\sqrt[n+1]{a^n x^{-n}}}+a\sqrt{1+\sqrt[n+1]{x^n a^{-n}}}=\left(b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}=b.$$

17. Теңдемени $x-14=y$ деп белгилеп алып, чыгаруу оңтойлуу болот.

Анда

$$x-13=y+1,\ x-9=y+5,\ x-11=y+3$$

деп көчүрүп жазууга болот. Теңдеменин бардык мүчөсүн сол жагына (барабардыктын) топтоп $y\ (y+1)\times\times(y+3)\ (y+5)$ ке көбөйтөбүз. Ошондо

$$2(y+1)\ (y+3)\ (y+5)-5y\ (y+3)\ (y+5-2y\ (y+1)\times\times(y+3)+5y\ (y+1)\times\times(y+5)=0;$$

$$10\,y^2+40+30-10y^2-50y=0;$$

$$10y=30;\ y=3$$

болот. Анда $x=17$.

18. Бул теңдемени төмөндөгү интервалдарда карайбыз:

$$x<-3;\ -3<x<-2;\ -2<x<1;\ x>1.$$

1) $x\leqslant-3$ теңдеме

$1-x+(x+3)=-(x+2)$, $x=-6$ шартты канааттандырат.

2) $-3\leqslant x\leqslant-2$ теңдеме

$1-x-(x+3)=-(x+2)$, $x=0$ дү канааттандырбайт. Анткени шартка каршы, б. а. алынган сегментте жатпайт.

3) $-2<x<1$ болгондо, теңдеме

$$1-x-(x+3)=x+2.$$

$3x=-4$, $x=-\frac{4}{3}$ болот да, берилген (алынган) интервалда жаткандыктан, шартты канааттандырат. Ошондуктан $x=-\frac{4}{3}$ жарайт.

4) $x>1$ болгондо, теңдеме

$$-(1-x)-(3+x)=x+2,\ x=-6$$

шартты канааттандырбайт.

Ошентип, теңдеменин чыгарылыштары $x=-\frac{1}{3}$ жана $x=-6$ болот.

19. Системанын биринчи теңдемесинен экинчисин жана үчүнчүсүн кемитип,

$$\begin{cases} (a-b)y+(a^2-b^2)z=a^3-b^3. \\ (a-c)\,y+(a^2-c^2)z=a^3-b^3 \end{cases}$$

алабыз. Биринчисин $a-b$ га, экинчисин $a-c$ га бөлсөк,

$$y+(a+b)z=a^2+ab+b^2,$$
$$y+(a+c)z=a^2+ac+c^2.$$

Биринчисинен экинчисин кемитсек,

$$(b-c)\ z=ab+b^2-ac+c^2$$

чыгат. Мындан

$$z=a+b+c.$$

Бул маанини акыркы системанын каалаган теңдемесине коюп,

$$y=a^2+ab+b^2-(a+b)\ (a+b+c)=-(ab+bc+ac)$$

табабыз. Акырында берилген теңдеменин каалаганына коюп, x ти табууга болот, б. а.

$$x=a^3+a(ab+bc+ac)-a^2(a+b+c)=abc.$$

Ошентип,

1) $a\neq b\neq c$ болсо, анда система

$$x=abc,\ y=-(ab+ac+bc);$$
$$z=a+b+c$$

га барабар бир чыгарылышка ээ болот.

2) $a=b$; $a\neq c$; $b\neq c$ болсо, анда

$$0\cdot x=0,\ 0\cdot y=0,\ 0\cdot z=0$$

болот да, система чексиз көп чыгарылышка ээ болот. Муну аныктоо анчалык кыйын эмес.

Биз мисал үчүн z ти тапканда, z тин коэффициентине $(a-b)$, $(a-c)$ жана $(b-c)$ га бош мүчөнү: $a+b+c)$, $(a-b)$, $(b-c)$, $(a-c)$ ны удаалаш үч жолу бөлдүк, ошондо $z=a+b+c$ табылды. Эгерде биз $(a-b)$, $(a-c)$ жана $(b-c)$ га бөлбөй, толук жазсак, анда

$$(a-b)\ (b-c)\ (a-c)z=(a-b)\ (a-c)\ (b-c)\ (a+b+c)$$

болмок. Ошондой эле

$$(a-b)\ (a-c)y=(a-c)\ (a-b)\ (ab+bc+ac)$$

жана

$$0\cdot x=0\cdot abc.$$

Демек, мындан жогорудагы биз айткан x, y, z тин чексиз көп маанилери келип чыгат.

3) $a\neq b$, $b=c$, $a\neq c$ болсо, анда да жогорудагыдай эле система чексиз көп чыгарылышка ээ болорун аныктоого мүмкүн болот, б. а. системанын чексиз көп чыгарылышы болот.

4) $a\neq b$, $b\neq c$, $a=c$ болсо, анда да система көп чыгарылышка ээ болот. Анткени $a-b$, $a-c$, $b-c$ нын бирөө эле нөл болсо, $(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)=0$ болот. Ошентип, $0\cdot z=0$, $0\cdot y=0$ дөн $0\cdot x=0$ чыгат.

5) $a=b=c$ болгондо да чексиз көп чыгарылышка ээ болот.

20. Экинчи теңдемени

$$y-5=|x-1| \qquad (1)$$

деп көчүрүп жазабыз. Мында $|x-1|\geqslant 0$ болгондуктан, $y\geqslant 5$ болот. Ошондуктан, биринчи теңдемени

$$|x-1|+y-5=1$$

деп жазабыз. Буга (1) барабардыктагы $|x-1|$ маанисин коюп,

$$2(y-5)=1,\ y=\frac{11}{2}$$

табабыз. y тин маанисин (1) барабардыкка коюп,

$$x-1=\frac{1}{2}$$

алабыз. Бул теңдемени чыгарып, x тин маанилерин аныктайбыз.

а) Эгерде $x<1$ болсо, анда $x=\frac{1}{2}$ болот.

б) Эгерде $x>0$ болсо, анда $x=\frac{3}{2}$ болот. Ал эми $y<5$ болууга мүмкүн эмес, себеби,

$$y-5=|x-1|$$

болгондуктан. Эгерде $y<5$ болсо, анда

$$|x-1|<0,$$

б. а. сандын абсолюттук чоңдугу нөлдөн кичине болбойт. Ошентип, системанын эки чыгарылышы болот:

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad y_1 = \frac{11}{2} \text{ жана } x_2 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = \frac{11}{2}.$$

21. 1) Эгерде $x \geqslant 0$ жана $y \geqslant 0$ болсо, анда система

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0, \\ y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

болот. Мындан $x_1 = 2$; $y_1 = 1$ табылат.

2) Эгерде $x \geqslant 0$ жана $y \leqslant 0$ болсо, анда система

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0, \\ -y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

болот. Мындан $x_2 = 0$, $y_2 = -3$ чыгат.

3) Эгерде $x \leqslant 0$ жана $y \geqslant 0$ болсо, анда система

$$\begin{cases} y + 2x + 3 = 0, \\ y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

болот. Мындан $x_3 = -6$; $y_3 = 9$ чыгат.

4) Эгерде $x \leqslant 0$ жана $y \leqslant 0$ болсо, анда

$$\begin{cases} y + 2x + 3 = 0, \\ -y + x - 5 = 0 \end{cases}$$

чыгат. Мындан $x_4 = 0$, $y_4 = -3$.

22. Берилген теңдеменин сол жагын өзгөртөбүз да, теңдемени төмөндөгү түргө келтирип жазабыз:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + x^2 + 1 - 3x^2 - 2x - x - 1 - a = 0$$

же

$$(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) - (a - 2) = 0.$$

Эми

$$x^2 + x + 1 = y \qquad \text{(A)}$$

деп белгилеп алып, ордуна койсок

$$y^2 - 3y - (a - 2) = 0$$

теңдемесин алабыз. Мындан y ти табабыз:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

y тин маанисин (A)га коюп, x тин маанилерин аныктайбыз, б. а.

$$x^2 + x + 1 = \frac{3 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{4a + 1}}}{2}$$

болот.

а) Эгерде $4a+1<0$ болсо, б. а. $a<\frac{1}{4}$ болсо, анда теңдеменин тамырлары мнимый болот.

б) Эгерде $0\leqslant 4a+1\leqslant 1$,

$$-1\leqslant 4a\leqslant 0,\ -\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 0$$

болсо, анда теңдеме анык ар түрдүү тамырларга ээ болот.

а) Эгерде

$$1<4a+1,\ a>0$$

болсо, анда теңдеменин эки тамыры анык, эки тамыры мнимый болот.

23. $x+1=u$ деп белгилейли, анда берилген теңдемени

$$u^6-9u^2+20=0$$

деп жазабыз. Бул үч мүчөлүү теңдеме.
Ошондуктан $u^3=t^2$ деп белгилеп алып, $t^2-9t+20=0$ теңдемесин чыгарабыз. Мындан $t_1=4$; $t_2=5$ болот. Анда

$$u^3=4,\ u^3-4=0,\ (u-\sqrt[3]{4})(u^2+\sqrt[3]{4}u+\sqrt[3]{16})=0,$$

$$u-\sqrt[3]{4}=0,\ u_1=\sqrt[3]{4}.$$

$$u^2+\sqrt[3]{4}u+\sqrt[3]{16}=0,\ u_{2,3}=\frac{(-1\pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{4}}{2}$$

табабыз. Бул маанилерди u нун ордуна $x+1=u$ га коюп,

$$x_1=\sqrt[3]{4}-1\ ;\ x_{2,3}=\frac{(-1\mp i\sqrt{3})\sqrt[3]{4}}{2}-1 \text{ ди}$$

алабыз.
Ал эми $u^3=5$ же $u^3-5=0$,

$$(u-\sqrt[3]{5})(u^2+\sqrt[3]{5}u+\sqrt[3]{25})=0,$$

$$u-\sqrt[3]{5}=0,\ u_4=\sqrt[3]{5},$$

$$u^2+\sqrt[3]{5}u+\sqrt[3]{25}=0,\ u=\frac{(-1\pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{5}}{2}.$$

Бул маанилерди u нун ордуна $x+1=u$ га коюп, x тин калган маанилерин табабыз, б. а.

$$x+1=\sqrt[3]{5};\quad x_4=\sqrt[3]{5}-1,$$

$$x+1=\frac{(-1\pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{5}}{2}, \qquad x_{5,6}=\frac{-1\pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{5}}{2}-1.$$

24. Маселенин шарты боюнча тамыр астындагы бардык сандын терс эместиги ачык көрсөтүлгөн эмес. Жөн гана тамырлардын оң маанисинде деп коюлган. x тин маанилеринин тобу аныкталган эмес. Ошондуктан, $2x-1\geqslant 0$ болгон $x\geqslant\frac{1}{2}$ маанисин карап чыгуу керек. x тин бул маанилеринин тобунда дагы калган тамырлардын, тамырдын астындагы маанилери оң сан экендигин көрсөтөбүз. $x+\sqrt{2x-1}$ үчүн, $x+\sqrt{2x-1}\geqslant 0$ экендиги белгилүү, себеби кошулуучулардын ар бири оң сан. Бизге $x-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$ экендигин далилдөө керек.

$$(x-1)^2=x^2-2x+1\geqslant 0$$

үч мүчөсүнүн терс эместигинен $x^2\geqslant 2x-1$, же $x\geqslant\geqslant\sqrt{2x-1}$ келип чыгат. Демек, $x\geqslant\frac{1}{2}$ маанилеринде $x-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$ болот. Эми ар бир тамырды өзүнчө өзгөртүп көрөбүз:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}+1|.$$

Ушундай эле

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|\sqrt{2x-1}-1|.$$

Тамырлардын бул маанилерин $x\geqslant\frac{1}{2}$ де аныкталган функцияга коёбуз да,

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\sqrt{2x-1}+1|+$$

$+|\sqrt{2x-1}-1|)$ ээ болобуз. Бул туюнтманын (функциянын) аныктоо областын эки интервалга бөлөбүз: $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ жана $1\leqslant x<+\infty$. Ар бир аралыкта функциянын маанилерин эсептейбиз:

а) биринчи аралыкта

$$\left(\frac{1}{2}\leqslant x<1\right),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+(-\sqrt{2x-1}+1)\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2};$$

б) экинчи аралыкта

$$(1\leqslant x<+\infty),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1+\sqrt{2x-1}-1)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

Мындан барабардыктагы маселенин шартын канааттандыруучу x тин маанилери жана x тин ошол маанисиндеги барабардыктын маанилери келип чыгат.

а) $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ болгондо, $y=\sqrt{2}$.

б) x тин эч бир маанисинде $y=1$ болбойт, анткени $y\geqslant\sqrt{2}$ болот.

в) $x=\frac{3}{2}$ болгондо, $y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2$.

25. Берилген теңдемени удаасы менен үч жолу квадратка көтөрүп,

$$x^2+31x-222=0$$

түрүндөгү теңдемени алабыз. Муну чыгарып, $x_1=6$, $x_2=-37$ алабыз.

26. 1, $\sqrt{2}$, жана 2 сандары бир эле арифметикалык прогрессиянын катары менен эмес (удаалаш эмес) мүчөлөрү болсун деп болжолдойлу. Анда 1 саны прогрессиянын $k=$чы, 2 саны $m=$чи, 2 саны $n=$чи мүчөсү болсун дейли. Ал эми бул прогрессиянын биринчи мүчөсүн a, айырмасын d десек, анда

$$\begin{cases} a+d(k-1)=1,\\ a+d(m-1)=2,\\ a+d(n-1)=2.\end{cases}\qquad(1)$$

Бул барабардыктан a жана d сандарын чыгарып таштасак, төмөндөгүдөй жыйынтыкка келүүгө болот. Экинчи теңдемеден биринчисин кемитсек,

$$m-k=\sqrt{2}-1, \qquad (2)$$

үчүнчүдөн биринчисин кемитсек,

$$n-k=1 \qquad (3)$$

болот. (2) ни (3) гө бөлсөк,

$$\frac{m-k}{n-k}=\sqrt{2}-1 \qquad (4)$$

болот. Демек, (4) барабардыкта сол жагы рационалдуу сан, ал эми оң жагы иррационалдуу сан. Бул сандар барабар болууга мүмкүн эмес. Ошентип, мүчөлөрү 1, $\sqrt{2}$ жана 2 болгон сандар боло албайт.

27. Чыгаруунун биринчи жолу.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\left[a_1+\frac{d(n-1)}{2}\right]n,\\ S_{n+1} &= \left[a_1+\frac{dn}{2}\right](n+1),\\ S_{n+2} &= \left[a_1+\frac{d(n+1)}{2}\right] n+2),\\ S_{n+3} &= \left[a_1+\frac{d(n+2)}{2}\right](n+3). \end{aligned} \qquad (1)$$

Бул туюнтмаларды

$$S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=0$$

барабардыгына коюп, жөнөкөйлөткөндө сол жагы нөлгө барабар экендигин көрсөтүүгө болот. Чындыгында:

$$S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=\left[a_1+\frac{d(n+2)}{2}\right](n+3)-$$

$$-3\left[a_1+\frac{d(n+1)}{2}\right]\cdot(n+2)+3\left[a_1+\frac{dn}{2}\right](n+1)-\left[a_1+\right.$$

$$\left.+\frac{d(n-1)}{2}\right]n=a_1\left[(n+3)-3(n+2)+3(n+1)-n\right]+$$

$$+\left[(n+2)(n+3)-3(n+1)(n+2)+3n(n+1)-n(n-1)\right]\frac{d}{2}=$$

$$=\frac{d}{2}\left[(n+2)(n+3-3n-3)+n(3n+3-n+1)=\frac{d}{2}\right[-$$

$$\left.-2n(n+2)+2n(n+2)\right]=0.$$

Ушуну далилдөө талап кылынган.

Чыгаруунун экинчи жолу.

$$S_p - S_n = (p-n)\left[a_1 + \frac{d(p+n-1)}{2}\right] \qquad (*)$$

шартын түзүү керек. Эгерде муну түзсөк, анда

$$S_{n+3} - S_n = 3(S_{n+2} - S_{n+1})$$

экендигин көрсөтөбүз. Мындан далилденүүчү барабардык келип чыгат. (*) негизинде

$$S_{n+3} - S_n = \left[a_1 + \frac{d(n+3+n-1)}{2}\right](n+3-n) = 3\left[a_1 + d(n+1)\right]. \qquad (1)$$

$$3(S_{n+2} - S_{n+1}) = 3(n+2-n-1)\left[a_1 + \frac{d(n+2+n+1-1}{2}\right] =$$
$$= 3\left[a_1 + d(n+1)\right]. \qquad (2$$

Демек, (1) менен (2) барабар. Биз (*) пайдаланып далилдедик, эми (*) тууралыгын далилдейли. Формула боюнча

$$S_p = \left[a_1 + \frac{d(p-1)}{2}\right]p = p\left[a_1 + \frac{d(p+n-1)}{2} - \frac{nd}{2}\right],$$
$$S_n = \left[a_1 + \frac{d(n-1)}{2}\right]n = n\left[a_1 + \frac{d(p+n-1)}{2} - \frac{pd}{2}\right].$$

Мындан

$$S_p - S_n = (p-n)\left[a_1 + \frac{d(p+n-1)}{2}\right]$$

чыгат.

28. Биринчи туюнтманы жөнөкөйлөтөбүз:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = 4(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2$ суммасын аныктоо үчүн бардык натуралдык сандардын квадраттарынын суммасынан жуп сандын квадраттарынын суммасын кемитебиз, б. а.

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots +$$
$$+ (2n+1)^2] - 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 =$$
$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

29. Биринчи прогрессиянын жалпы мүчөсү:

$$a_n = 17 + 3(n-1) = 3n + 14.$$

Экинчи прогрессиянын жалпы мүчөсү:

$$a_n = 16 + 4(m-1) = 4m + 12.$$

Ал эми

$$4m + 12 = 3n + 14$$

болгон мүчөлөрү гана барабар болот.

Мындан $\quad n = m + \frac{m-2}{3}.$

n бүтүн сан болсун үчүн зарыл жана жетиштүү шарт:

$$\frac{m-2}{3} = k, \; m-2 = 3k, \; m = 3k+2.$$

Анда

$$a_n' = 4(3k+2) + 12 = 12k + 20.$$

Мында

$$k = 0, \; 1, \; 2, \; \dots, \; 99.$$

Биринчи барабар сандар 20, ал эми жүзүнчү сан 1208 болот.

Демек,

$$S_{100} = \frac{(20 + 1208) \cdot 100}{2} = 61400.$$

30. Эгерде бул сандар $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ геометриялык прогрессиянын мүчөлөрү, $a_m = 1$, $a_n = 7$, $a_p = 18$ болсо, анда $7 = 1 \cdot q^{n-m}$, $18 = 1 \cdot q^{p-m}$ же $7^{p-m} = q^{(n-m)(p-m)}$, $18^{n-m} = q^{(n-m)(p-m)}$ болор эле. Мындан $7^{p-m} = 18^{n-m}$ чыгат, бирок бул мүмкүн эмес. Чын эле, эгерде $m < n < p$ деп эсептесек, анда барабардыктын оң жагынын 2 деген көбөйтүүчүсү бар, ал эми сол жагында мындай көбөйтүүчү жок.

31. Арифметикалык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү a, $a+d$ жана $a+2d$ дейли, анда

$$a^2 = b, \; (a+d)^2 = bq; \; (a+2d)^2 = bq^2$$

болот. Эгерде арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрүнүн квадраттары геометриялык прогрессияны түзүшсө, анда (1) деп геометриялык прогрессиянын аныктоосу (касиети) боюнча

$$(bq)^2 = b \cdot bq^2,$$

б. а.

$$[(a+d)^2]^2=a^2(a+2d)^2$$

же

$$(a+d)^2=\sqrt{a^2(a+2d)^2},$$
$$(a+d)^2=\pm a(a+2d)$$

чыгат. Мындан эгерде

$$(a+d)^2=a(a+2d)$$

болсо, анда

$$a^2+2ad+d^2=a^2+2ad,$$
$$d=0$$

болот. Эгерде

$$(a+d)^2=-a(a+2d)$$

болсо, анда

$$a^2+2ad+d^2=-a^2-2ad,$$
$$d^2+4ad+2a^2=0,$$
$$d=a(-2\pm\sqrt{2})$$

болгондо маселе канааттандырылат. Мындан q ну табабыз.

32. Берилген сумманы

$$S=7+77+\ldots+77\ldots7=7(1+11+\ldots+11\ldots1)$$

деп жазып, 9 га көбөйтүп, бөлөбүз:

$$S=\frac{7}{9}(9+99+\ldots+99\ldots9)=\frac{7}{9}(10-1+10^2-1+10^3-$$

$$-1+\ldots+10^n-1)=\frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{10-1}-n\right)=\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right).$$

33. Маселенин шарты боюнча геометриялык прогрессияны түзүүчү удаалаш беш сан: a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} жана анын үчүнчүсү a_{n+2} дейли, анда

$$a_1q^{n-1}+a_1q^n+a_1q^{n+1}+a_1q^{n+2}+a_1q^{n+3}=19a_1q^{n+1},$$
$$a_1q^{n-1}(1+q-18q^2+q^3+q^4)=0,$$
$$a_1q^{n-1}\neq0, \text{ себеби } a_1\neq0,\ q\neq0.$$

Ошондуктан, $q^4+q^3-18q^2+q+1=0$.
Теңдеменин эки жагын тең q^2 ка бөлөбүз.

$$q^2+q-18+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}=0$$

же

$$\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)+\left(q+\frac{1}{q}\right)-18=0. \qquad (*)$$

Бул теңдемеден $q+\frac{1}{q}=u$ деп белгилесек, анда мунун эки жагын квадратка көтөрүп,

$$q^2+\frac{1}{q^2}+2=u^2; \quad \frac{1}{q^2}+q^2=u^2-2$$

табабыз. Муну (*) койсок,

$$u^2+u-20=0$$

чыгат. Бул теңдемени чыгарып, $u_1=-5$ жана $u_2=4$ табабыз. Бул маанилерди u нун ордуна койсок,

$$q+\frac{1}{q}=-5 \text{ жана } q+\frac{1}{q}=4$$

теңдемелери чыгат. Бул эки теңдемени чыгарып, q нун маанилерин табабыз, б. а.

$$q_1=2+\sqrt{3},\ q_2=2-\sqrt{3},\ \ q_3=\frac{-5+\sqrt{21}}{2},\ q_4=-\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

Берилген прогрессия өсүүчү болгондуктан

$$q=2+\sqrt{3}$$

болот. q нун калган маанилери маселенин шартын канааттандырбайт. Анда прогрессиянын m-чи мүчөсү

$$a_m=a_1\cdot q^{m-1}.$$

Маселенин шарты боюнча $a_m=1$, ошондуктан

$$a_1(2+\sqrt{3})^{m-1}=1$$

болот. Мындан

$$a_1=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-1}}$$

табабыз. Демек, изделүүчү прогрессия

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-1}}, \qquad \frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-2}}, \ \ldots$$

болот.

34. Прогрессиялардын биринчи мүчөлөрүн $a_1=b_1=a$, арифметикалык прогрессиянын айырмасын d, геометриялык прогрессиянын бөлүмүн q дейли, анда маселенин шарты боюнча

$$\begin{cases} a+(a+d)-(a+aq)=3a, \\ a+(a+d)+(a+2d)=a+aq+aq^2. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) нин биринчисин чыгарып,

$$2a+d-a-q=3a, \qquad (2)$$
$$d=a(q+2)$$

табабыз. Экинчисин чыгарып,

$$2a+3d=aq+aq^2,$$

$$d=\frac{a(q^2+q-2)}{3} \qquad (3)$$

табабыз. Анда (2) менен (3) ден

$$q^2+q-2=3(q+2)$$

чыгат. Мындан

$$q_1=4, \ q_2=-2$$

болот. q нун маанилерин (2) коюп, $d_1=6a$, $d_2=0$ алабыз. $d=0$ болгондо прогрессия болбойт. Ошентип, изделүүчү прогрессиялар $d=6a$, $q=2$ болгон прогрессиялар болот, б. а.

$$a, \ 7a, \ 13a, \ \ldots$$
$$a, \ 4a, \ 16a, \ \ldots$$

болот.

35. $t=5$с.

36. Берилген барабардыктын эки жагына тең $2ab$ ны кошуп,

$$(a+b)^2=9ab$$

же

$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$$

алабыз. Муну каалаган негиз боюнча логарифмаласак,

$$2\log_c\frac{a+b}{3}=\log_c a+\log_c b,$$

$$\log_c\frac{a+b}{3}=\frac{\log_c a+\log_c b}{2}$$

чыгат.

37. Аныктоонун негизинде

$$\log_{ab}N=\frac{\log_a N}{\log_a(ab)}$$

деп жазабыз. Анда

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab}N}=\frac{\log_a N}{\dfrac{\log_a N}{\log_a(ab)}}=\log_a(ab)=\log_a a+\log_a b=1+\log_a b.$$

38. Маселенин шарты боюнча

$$b^2=ac.$$

Негизин N деп алып, логарифмалайбыз

$$2\log_N b=\log_N a+\log_N c$$

же

$$\log_N b-\log_N a=\log_N c-\log_N b, \qquad (1)$$

эми далилденүүчү барабардыктын сол жагын өзгөртүп жазабыз

$$\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}=\frac{\dfrac{1}{\log_N a}-\dfrac{1}{\log_N b}}{\dfrac{1}{\log_N b}-\dfrac{1}{\log_N c}}=\frac{(\log_N b-\log_N a)\log_N c}{(\log_N c-\log_N b)\log_N a}=$$

$$=\frac{(\log_N b-\log_N a)\dfrac{1}{\log_c N}}{(\log_N b-\log_N a)\dfrac{1}{\log_a N}}=\frac{\log_a N}{\log_c N}.$$

39. Берилген барабардыктын сол жагын:

$$\log_b a=\frac{n\log_b a}{n\log_b b}=\frac{\log_b a^n}{\log_b b^n}=\frac{\log_{b^n} a^n}{\log_b b^n}=\frac{\log_{b^n} a^n}{\log_{b^n} b\cdot\log_b b^n}=\log_{b^n} a^n$$

түрүндө өзгөртүп алабыз.

40. *Чыгаруунун биринчи жолу.*

$$\log_{\frac{a}{b}} x=\frac{1}{\log_x\dfrac{a}{b}}=\frac{1}{\log_x a-\log_x b}=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}-\dfrac{1}{\log_b x}}=\frac{\log_a x\cdot\log_a x}{\log_b x-\log_a x}.$$

Чыгаруунун экинчи жолу.

$$\log_a x=m,\ \log_b x=n$$

дейли. Анда

$$x=a^m,\ x=b^n$$

же

$$x^{\frac{1}{m}}=a,\ x^{\frac{1}{n}}=b. \qquad (1)$$

(1) нин биринчисин экинчисине бөлүп,

$$x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{a}{b}$$

алабыз. Бул барабардыктын эки жагын тең $\frac{a}{b}$ негиз боюнча логарифмалайбыз, анда $\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\log_{\frac{a}{b}} x=1$,

мындан $$\log_{\frac{a}{b}} x=\frac{1}{\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}}=\frac{mn}{n-m}$$

чыгат. Ал эми бул барабардыкка m жана n дин маанилерин коюп,

$$\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_b x - \log_a x}$$

алабыз.

41. Берилген барабардыктын сол жагын жаңы негизге өтүүнүн формуласын колдонуп, бирдей негизге келтиребиз, б. а.

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 =$$

$$= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{1}{3} \log_2 7 = \frac{1}{3}.$$

42. Барабардыктын оң жагын өзгөртүп, сол жагына келүүгө болот, б. а.

$$\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1 = \log_3 4 +$$

$$+ \log_3 3 = \log_3 12.$$

Ушуну далилдөө талап кылынган.

43. Берилген теңдемени

$$5^x 2^{\frac{3x}{x+1}} = 5^2 \cdot 2^2$$

деп жазууга болот. Мындан дароо эле бир тамыры $x=2$ экендигин аныктоого болот. Эми теңдеменин калган тамырын табуу үчүн теңдемени негизи 10 боюнча логарифмалайбыз,

$$x \log_{10} 5 + \frac{3x}{x+1} \log_{10} 2 = 2.$$

Орток бөлүмгө келтирип ($x \neq -1$ деп),

$$x^2 \lg 5 + (\lg 5 + \lg 2) x - 2x - 2 = 0$$

же $(\lg 5) x^2 + (\lg 5 + 3\lg 2 - 2) x - 2 = 0$

$$x^2 + \frac{\lg 5 + 3 \lg 2 - 2}{\lg 5} x - \frac{2}{\lg 5} = 0.$$

$x_1 = 2$ болгондуктан, Виеттин теоремасы боюнча

$$x_1 = \frac{\lg 5 + 3 \lg 2 - 2}{\lg 5} - 2 = -\frac{1}{\lg 5} \text{ (мында } x_1 + x_2 = -p \text{ боюнча).}$$

44. Эгерде $x > 2$ болсо, анда теңдемени

$$3^{-(2-x)} 2^{2x} + 7 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$$

түрүндө көчүрүп жазууга болот. Муну өзгөртүп жазабыз: $3^{x-2} 2^{2x} + 7 \cdot 2^x = 3^x \cdot 2$,

$$3^{x-2}\left[2^{2x}+7\frac{2^x}{3^{x-2}}-2\right]=0.$$

Мындан $2^{2x}+7\cdot 9\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$ алабыз же $2^{2x}+63\left(\frac{2}{3}\right)^x=2.$

Сол жагы оң сандардын суммасы. x тин эч бир маанисинде бул сумма 2 барабар эмес. Демек, $x<2$ болгондо теңдеменин чыгарылышы болбойт.

Эгерде $x<2$ болсо, анда берилген теңдемени

$$3^{2-x}2^{2x}+7\cdot 2^x=2\cdot 3^x$$

же

$$9\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^x\cdot 3^x=2\cdot 3^{2x}$$

түрүндө жазууга болот. Эми теңдеменин эки жагын тең 3^{2x} бөлүп,

$$9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$$

алабыз. Бул квадрат теңдемени чыгарып, алабыз:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{-7\pm 11}{18}.$$

$$1)\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{9};\quad 2)\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=-1.$$

Теңдеменин экинчиси чыгарылышка ээ болбойт, себеби x тин ар кандай маанисинде $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ терс эмес. Ошентип, биринчисин чыгарып,

$$x=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{9}\right)=1+\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$$

табабыз. Демек, теңдеменин $x<2$ болгондо гана бир чыгарылышы болот.

45. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ барабардыгын пайдаланып, теңдемени өзгөртүп жазабыз:

$$1+\log_b(2\lg a-x)\cdot\frac{1}{\log_b x}=\frac{2}{\log_b x}. \qquad (1)$$

Мында маселенин шарты боюнча $b\neq 1$, $x\neq 1$ жана $b>0$, $x>0$, анткени теңдеменин берилиши боюнча x жана b сандары логарифманын негиздери. (1) ден

$$\log_b x+\log_b(2\lg a-x)=2$$

же $\log_b[x(2\lg a-x)]=2,$

$$x\cdot 2\lg a - x^2 = b^2,$$
$$x^2 - (2\lg a)x + b^2 = 0.$$

Мындан

$$x_{1,2} = \lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2}.$$

Теңдеме $\lg^2 a - b^2 \geqslant 0$, $\lg^2 a \geqslant b^2$

$$\lg a \geqslant b,$$
$$a \geqslant 10^b$$

болгондо гана чыгарылышка ээ болот.

1) $a = 10^b$ болгондо

$$x = \lg 10^b = b$$

болот.

2) $a > 10^b$ болгондо

$$x_1 = \lg a + \sqrt{\lg^2 a - b^2},$$
$$x_2 = \lg a - \sqrt{\lg^2 a - b^2}$$

болот.

3) (2) барабардыктан $a < 10^b$ болгондо теңдеменин чыгарылышы болбой тургандыгы көрүнүп турат.

4) Теңдеменин x_1 жана x_2 эки тамыры тең оң сан болот. Анткени 1) $a > 10^b$ болгондуктан

$$\lg 10^b = b,$$
$$\lg a + \sqrt{\lg^2 a - b^2} > 0$$

болот.

2) $a > 10^b$ болгондо,

$$\lg a > \sqrt{\lg^2 a - b^2}$$

болгондуктан,

$$\lg a - \sqrt{\lg^2 a - b} > 0$$

болот. Себеби

$$\lg^2 a > \lg^2 a - b^2.$$

Мындан $$\lg a > \sqrt{\lg^2 a - b^2}.$$

46. Теңдемени негизи 2 болгон логарифмага келтиребиз. Ошондо

$$\frac{\log_2\left(\frac{2}{x}\right)}{\log_2(2x)}\cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$$

же

$$\frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x}\cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$$

болот. Муну жөнөкөйлөтсөк.

$$(1-\log_2 x)\log_2^2 x + \log_2^4 x(1+\log_2 x) - (\log_2 x + 1) = 0,$$

$$(1-\log_2 x)\log_2^2 x+(1+\log_2 x)(\log_2^2 x-1)(\log_2^2 x+1)=0,$$

$$(\log_2 x-1)(\log_2^4 x+2\log_2 x+\log_2^2 x+2\log_2 x+1)=0$$

чыгат. Ал эми $x>1$ болгондо, экинчи кашаанын ичиндеги ар бир кошулуучу оң сан болгондуктан, суммасы нөлгө барабар болууга мүмкүн эмес. Ошондуктан алабыз:

$$\log_2 x-1=0,\ x=2.$$

47. I. Негизи 3 боюнча логарифмалайбыз: $\log_x 3+\log_3 x\times$ $\times\log_3 x=2$,

$$\frac{1}{\log_3 x}+\log_3^2 x=2.$$

Мындан

$$\log_3^3 x-2\log_3 x+1=0$$

келип чыгат.

$$\log_3 x=y \qquad (1)$$

менен белгилеп, $y^3-2y+1=0$

теңдемесин алабыз. Бул теңдемени чыгарабыз:

$$(y-1)\ (y^2+y-1)=0,$$

$$y_1=1;\quad y_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Бул маанилерди (1) коюп, үч теңдеме алабыз, б. а.

1) $\log_3 x=1$, 2) $\log_3 x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 3) $\log_3 x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Биринчи теңдемени чыгарып, $x=3$, экинчисинен

$$x_2=3^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

үчүнчүсүнөн

$$x_3=3^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

табабыз. Ошентип, буларды текшерип, ал тамырлар чыгарылышы экендигине ишенүүгө болот.

II. Теңдемени чыгарбастан дароо эле $x=1$ теңдеменин тамыры экендигин аныктап алабыз. Эми $x\neq 1$ деп алып, берилген теңдемени

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

негизинде көчүрүп жазабыз (эң мурун логарифмалайбыз).

$$2\log_{0,5x} x - 14 \cdot 3\log_{16x}x + 40 \cdot \frac{1}{2}\log_{4x}x = 0$$

же

$$\log_{0,5x}x - 21\log_{16x}x + 10\log_{4x}x = 0,$$

$$\frac{1}{\log_x(0,5x)} - \frac{21}{\log_x(16x)} + \frac{10}{\log_x(4x)} = 0,$$

$$\frac{1}{1-\log_x 2} \quad \frac{21}{4\log_x 2 + 1} + \frac{10}{2\log_x 2 + 1} = 0.$$

Мындан,

$$\log_x 2 = y$$

деп белгилеп алып,

$$\frac{1}{1-y} - \frac{21}{4y+1} + \frac{10}{2y+1} = 0$$

теңдемесин алабыз. Бул теңдеме

$$\begin{cases} 2y^2 + 3y - 2 = 0, \\ (1-y)(4y+1)(2y+1) \neq 0 \end{cases}$$

системасына эквиваленттүү. $y_1 = -2$ жана $y_2 = \frac{1}{2}$ системага кирген теңдемелерди канааттандыргандыктан, теңдеменин чыгарылышы болот. Бул маанилерди y тин ордуна коюп, x тин калган маанилерин табабыз, б. а.

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; x_3 = 4.$$

48. I. Эки жагын квадратка көтөрсөк, $\left(x^{\log_{x^2}(x^2-1)}\right)^2 = 5^2$,

$$(x^2)^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 25$$

болот. Анда бул

$$a^{\log_a b} = b$$

формуланын, же логарифманын аныктоосунун негизинде алабыз.

$$x^2 - 1 = 25; \; x = \pm\sqrt{26}.$$

$x = -\sqrt{26}$ жарабайт, себеби логарифманын негизи терс сан эмес. Ошондуктан $x = \sqrt{26}$ болот.

II. Теңдеменин берилишиндеги шарт боюнча $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 - x = x(x-1) > 0$ болууга тийиш. Демек, бул үчүн $x > 1$ болушу зарыл жана жеткиликтүү. Эгерде $x > 1$ болбосо, анда

$$x - 1 < 0$$

болот да $x(x-1)<0$ болуп калат. Ал эми бул маселенин шартына каршы. Демек, $x>1$. Анда берилген теңдеме, өзгөрткөндөн кийин

$$x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}=a^{\log_a 2}\text{(мында } \log_a b=\log_{a^n}b^n\text{)},$$

$$x^{\frac{1}{2}\log_x(x^2-x)^2}=2,$$

$$x^{\log_x(x^2-x)}=2,\ x^2-x=2,\ x^2-x-2=0$$

чыгат. Мында, $x_1=-1$, $x_2=2$ алабыз. $x>1$ болгондуктан, $x=-1$ алынбайт. Ошентип, теңдеме $x=2$ деген бир гана чыгарылышка ээ болот.

49. Теңдемени

$$\frac{\log_2(3+x)}{\log_6(3+x)}+2\log_{\frac{1}{4}}(4-1)=\log_2(3+x)$$

түрүндө көчүрүп жазабыз. Мында

$$\frac{\log_2(3+x)}{\log_6(3+x)}=\frac{\log_{(3+x)}6}{\log_{(3+x)}2}=\log_2 6$$

болгондуктан,

$$\log_2 6-\log_2(4-x)=\log_2(3+x)$$

теңдемесине келебиз. Мындан

$$\log_2(x+3)(4-x)=\log_2 6,$$
$$x^2-x-6=0,$$
$$x_1=-2;\ x_2=3.$$

$x_1=-2$ алып таштайбыз, себеби $x=-2$ болгондо, $\frac{1}{\log_6(3+x)}$ мааниге ээ болбойт. Ошентип, теңдеменин $x=3$ болгон бир гана чыгарылышы бар.

50. Теңдемени

$$x^{\log_2 x^3-\log_2^2 x-3}=x^{-1}$$

түрүндө жазып, негизи 2 боюнча логарифмалайбыз:

$$(\log_2 x^3-\log_2^2 x-3)\log_2 x=-\log_2 x$$

же

$$(\log_2 x^3-\log_2^2 x-2)\log_2 x=0.$$

Мындан

$$\log_2 x=0,\ x_1=1$$

жана

$$3\log_2 x-\log_2^2 x-2=0,$$

$$\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0,$$

$$\log_2 x=1,\ x_2=2,$$
$$\log_2 x=2,\ x_2=4$$

алабыз. Шарт боюнча $x>0$ болот. Демек, табылган x тин маанилери оң сандар. Ошондуктан, теңдеменин үч чыгарылышы бар:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=4.$$

51. Экинчи теңдемеден $y=x^{-2}$ таап, биринчи теңдемеге коёбуз:

$$x^{x+x^{-2}}=(x^{-2})^{x-x^{-2}}, \qquad (1)$$

$$x^{x+\frac{1}{x^2}}=x^{2x+\frac{2}{x^2}}$$

Бул теңдемени чыгарабыз. Ал үчүн:

$$x=\pm 1,\ x=0.$$

(1) коюп текшеребиз.

$x_1=1$ болгондо, $1+\frac{1}{1}=-2+\frac{2}{1}$; $\quad 1=1$; $y=1$.

$x_2=-1$ болгондо, $(-1)=(-1)$; $1=1$, $y=1$. Демек, $x=\pm 1$ теңдемелердин системасынын тамыры болот. Эми $x\neq\pm 1$ деп, (1) теңдемени чыгарабыз. (1) теңдемени

$$x+\frac{1}{x^2}=-2x+\frac{2}{x^2}$$

деп жазабыз. Мындан

$$3x^3-1=0,\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ y=\sqrt[3]{9}$$

алабыз. Ал эми $9x^2+3x+1=0$ теңдеменин чыгарылышы мнимый болгондуктан албайбыз.

Ошентип, системанын үч түгөй чыгарылышын таптык, б. а.

$$(-1;\ 1),\ (1;\ 1),\quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ \sqrt[3]{9}\right).$$

52. Системанын эки теңдемесин тең логарифмалайбыз да жаңы

$$\begin{cases} \lg(x+1{,}5)\lg(x-y)=\lg 2-1, \\ \dfrac{1}{\lg(x-y)}\lg(2x+3)=-1 \end{cases} \quad (1)$$

системаны алабыз. Системада $x-y>0$, $x>y$, $x-y=1$ болууга тийиш. Себеби $x-y=1$, $x=y+1$ болгондо, $\frac{1}{\lg(x-y)}$ аныкталбайт. Жана дагы

$$\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ 2x+3>0, \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x>-1{,}5. \end{cases} \quad (2)$$

$x>-1{,}5$ болот.

Экинчи теңдемени өзгөртүп жазабыз. Эки жагын $\lg(x-y)$ көбөйтүп жана сол жагына бардык мүчөлөрүн топтойбуз, б. а.

$$\lg(2x+3)=-\lg(x-y),$$
$$\lg(2x+3)+\lg(x-y)=0. \quad (3)$$

Эми
$$\lg(2x+3)=\lg[(x+1{,}5)\cdot 2]=\lg(x+1{,}5)+\lg 2.$$

Муну (3) гө коюп, (1) менен бирге иштесек,

$$\begin{cases} \lg(x+1{,}5)\lg(x-y)=\lg 2-1, \\ \lg(x+1{,}5)+\lg(x-y)=-\lg 2 \end{cases} \quad (4)$$

чыгат.

Эгерде $\lg(x+1{,}5)=u$, $\lg(x-y)=t$ **(5)**

десек, анда (4) системаны

$$\begin{cases} ut=\lg 2-1, \\ u+t=-\lg 2 \end{cases}$$

түрүндө жазабыз. Мындан,

$$\begin{cases} z^2+z\cdot\lg 2+\lg 2-1=0, \\ z_1=-\lg 2+1=\lg 5, \ z_2=-1 \end{cases}$$

алабыз. Анда (6) система

$$\begin{cases} u_1=-\lg 2+1=\lg 5, \\ u_2=-1. \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1=-1, \\ t_2=-\lg 2+1=\lg 5 \end{cases}$$

ээ болот. Муну (5) ге коюп, эки система алабыз:

$$\begin{cases} \lg(x+1{,}5)x=\lg 5, \\ \lg(x-y)=-1. \end{cases} \text{(A)} \quad \begin{cases} \lg(x+1{,}5)=-1, \\ \lg(x-y)=\lg 5. \end{cases} \text{(B)}$$

Системанын (A) сын чыгаралы. Системаны аныктоо боюнча

$$\begin{cases} x + 1{,}5 = 5 \\ x - y = 10^{-1} \end{cases}$$

жазабыз. Мындан $x_1 = 3{,}5$; $y = 3{,}4$ алабыз. Системанын (В) сын

$$\begin{cases} x + 1{,}5 = 0{,}1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

деп жазып, $x_2 — 1{,}4$, $y = —6{,}4$ алабыз. Бул табылган маанилер системанын чыгарылышы боло алат, анткени

$$x - y = -1{,}4 - (-6{,}4) = 5,$$
$$x + 1{,}5 = -1{,}4 + 1{,}5 = 0{,}1$$

болот. Ошентип, системанын чыгарылыштары:

$$(3{,}5;\ 3{,}4),\ (-1{,}4; -1{,}6)$$

болот.

53. Белгисиздердин система аныктала турган маанилери $y > 0$, $x > 0$ жана $z > 0$. Ал эми $\sqrt[4]{x}$ жана $\sqrt[4]{y}$ тин арифметикалык гана тамырлары. Биринчи теңдемеден $x = y^{\frac{4}{3z}}$ таап, экинчи теңдеменин оң жагына коюп,

$$y^z = y^{\frac{4}{9z}} \qquad (1)$$

алабыз. (1) барабардык

$$y = 1 \text{ же } z = \frac{4}{9z}$$

болгондо гана мүмкүн. Эгерде $y = 1$ болсо, анда экинчи теңдемеден $x = 1$, үчүнчүсүнөн $z = 1$ табабыз. Ошентип, системанын биринчи чыгарылышы $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$.

Эгерде

$$z = \frac{4}{9z}$$

болсо, анда

$$z^2 = \frac{4}{9};\ z = \pm\frac{2}{3}$$

болот. Бирок $z = -\frac{2}{3}$ алынбайт,

себеби шартка каршы. Ошондуктан $z = \frac{2}{3}$

алабыз. Муну $x = y^{\frac{4}{3z}}$

барабардыгына койсок, $x=y^2$ чыгат. Муну системанын үчүнчү теңдемесине коюп,

$$\frac{4}{3}=\sqrt[4]{y^2}+\sqrt[4]{y},\ \sqrt[4]{y^2}+\sqrt[4]{y}-\frac{4}{3}=0,\ \sqrt[4]{y}=\frac{-1+\sqrt{\frac{19}{3}}}{2}$$

алабыз. Мындан

$$y=\frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^4; \quad x=\frac{1}{256}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^8$$

табабыз. Ошентип, системанын экинчи чыгарылышы:

$$y_2=\frac{1}{16}(7409-979\sqrt{57}),\ y_2=\frac{1}{18}(89-11\sqrt{57}),\ z=\frac{2}{3}.$$

54. Аныктоо боюнча

$$3^{\log_3 y}=y$$

болгондуктан, берилген системаны

$$\begin{cases} \log_5 x+y=7 \\ x^y=5^{12} \end{cases} \qquad (1)$$

түрдө жазабыз. Системанын биринчи теңдемесин потенцирлеп,

$$x\cdot 5^y=5^7$$

келебиз. Мындан

$$x=5^{7-y}.$$

Муну (1) системанын экинчи теңдемесине коюп,

$$5^{(7-y)y}=5^{12}$$

же

$$7y-y^2=12,$$
$$y^2-7y+12=0.$$
$$y_1=4,\ y_2=3$$

табабыз. Бул маанилерди (2) ге коюп,

$$x_1=125,\ x^2=625$$

табабыз.

55. $a>0,\ b>0,\ a\neq 1$ жана $b\neq 1$ экендигин белгилейбиз. Системанын биринчи теңдемесин a негизи боюнча логарифмалайбыз, анда

$$x+y\log_a b=1+\log_a b \qquad (1)$$

чыгат. Ал эми системанын экинчи теңдемесин бир эле a негизге келтиребиз, б. а.

$$2\log_a x = \frac{\log_a y}{\log_a\left(\frac{1}{b}\right)} \cdot \frac{\log_a y}{\log_a \sqrt{a}} = -2\log_a y.$$

Мындан

$$x = \frac{1}{y} \qquad (2)$$

табабыз. (2) ни (1) ге коюп,

$$x^2 + x(1 + \log_a b) + \log_a b = 0$$

тендемесин алабыз. Бул тендемени чыгарып,

$$x_1 = \log_a b,\ x_2 = 1$$

табабыз. Демек, анда

$$y_1 = \frac{1}{\log_a b} = \log_b a,\ y_2 = 1$$

болот.

Ошентип,

$$\begin{cases} x_1 = \log_a b, \\ y_1 = \log_b a \end{cases} \text{ жана } \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

болот.

56. Системада $x > 0$, $y > 0$ келип чыгат. Системанын экинчи тендемесинен

$$x = y^{\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y})} \qquad (1)$$

таап, системанын биринчи тендемесине коюп,

$$y^{\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y})} = y^{\frac{8}{3}}$$

же

$$y^{\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y})^2} = y^{\frac{8}{3}}$$

ээ болобуз. Эгерде $y \neq 1$ болсо, анда

$$\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + y)^2 = \frac{8}{3}$$

же

$$\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

болот. Мындан

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt{y} = \pm\frac{4}{3}. \qquad (2)$$

Жогорудагы шарт боюнча x, y оң болгондуктан,

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}>0$$

болууга тийиш. Ошондуктан

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}=-\frac{4}{3}$$

алып таштайбыз. Ошондо

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}=\frac{4}{3} \qquad (3)$$

чыгарабыз. (3) нү системанын биринчи тендемесине коюп,

$$\sqrt{y}=\sqrt[4]{x} \qquad (4)$$

табабыз. Анда (3), (4) дөн,

$$\sqrt{y}=\sqrt[4]{x}=\frac{2}{3}$$

чыгат. Мындан,

$$x_1=\frac{16}{81}, \quad y_1=\frac{4}{9}$$

алабыз. Эгерде $y=1$ болсо, анда $x=1$ экендигин дагы табууга болот. Ошентип, системанын эки

$$(1;\ 1) \text{ жана } \left(\frac{16}{81};\ \frac{4}{9}\right)$$

тамыры бар.

57. Системанын биринчи тендемесин потенцирлеп,

$$\log_8(y-x)^3=\log_8(3y-5x)$$

же

$$(y-x)^3=3y-5x$$

түрүндө жазабыз. Бул тендемени берилген системанын экинчиси менен бириктирип,

$$\begin{cases}(y-x)^3=3y-5x,\\ x^2+y^2=5\end{cases} \qquad (1)$$

системасын алабыз. (1) системаны

$$\begin{cases}(y-x)^3=3y-5x\\ 5-(x^2+y^2)\end{cases}$$

түрүндө жазууга болот. Буларды көбөйтүп,

$$5\ (y-x)^3=(x^2+y^2)\ (3y-5x).$$

же

$$y^3-6x^2\ y-5\ xy^2=0$$

алабыз. Муну x^3 ка бөлүп $(x \neq 0)$, анда

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

келебиз. Ал эми $\frac{y}{x}$ ти $\frac{y}{x} = u$ (2)

деп белгилеп,

$$u^3 - 5u^2 - 6u = 0$$

теңдемесин алабыз. Мындан, бул теңдеменин тамыры

$$u_1 = 0, \; u_2 = 2, \; u_3 = 3$$

болот.

Эгерде $u_1 = 0$ болсо, анда $y = 0$ болот, ал эми экинчи теңдемеден $x = \pm\sqrt{5}$ табабыз.

Муну системанын (берилген) биринчи теңдемесине коюп,

$$x = -\sqrt{5} \text{ жана } y = 0$$

табабыз. Ал эми

$$x = \sqrt{5} \text{ жана } y = 0$$

болсо, берилген системаны канааттандырбайт, себеби

$$x < y, \text{ же } 5x < 5y \text{ жана } 3x < 3y$$

же

$$3y - 5x < 5y - 3x$$

тең болот.

Эгерде $u = 3$ болсо, анда $y = 3x$, ал эми $x^2 = \frac{1}{2}$ болот да, анда мындан

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

болот. Эгерде $u = 2$ болсо, анда $y = 2x$ болот. Анда $x = 1$, $y = 2$ болот. Ошентип, бардык табылган маанилерди алып карап көргөндө системанын чыгарылышы

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{5} \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

болот.

58. Экинчи теңдемеден x менен y бирдей белгиде экендиги көрүнүп турат. Ошондуктан,

$$x + y > 0, \qquad (1)$$

демек, $x>0$, $y>0$ жана же $x>1$, же $y>1$ болот, себеби $xy=3$. Ошентип,

$$x+y>1 \qquad (2)$$

болот. Анда берилген системаны

$$\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3, \\ xy=3 \end{cases} \qquad (3)$$

түрүндө кайра жазабыз. Бул системаны төмөндөгүдөй учурлар үчүн карап чыгабыз.

1) Эгерде

$$0<x-y<1$$

болсо, анда системаны

$$\begin{cases} \log_2(x+y)-\log_2(x-y)=3, \\ xy=3 \end{cases} \qquad (3')$$

же

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=8, \\ xy=3 \end{cases} \qquad (4)$$

түрүндө жазабыз.

(4) нүн биринчи теңдемесинен $7x=9y$ табабыз. Экинчи теңдемеден $y=\frac{3}{x}$ таап, $7x=9y$ теңдемесине коюп, $x^2=\frac{27}{7}$ теңдемесин алабыз. Мындан

$$x=3\sqrt{\frac{3}{7}} \quad (x>0), \quad y=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

чыгат. $\quad x=-3\sqrt{\frac{3}{7}}<0$

болгондуктан, берилген системаны канааттандырбайт. Ошентип, x менен y тин бул маанилеринде

$$0<x-y<1$$

барабарсыздыгы аткарылат. Чындыгында эле

$$x-y=3\sqrt{\frac{3}{7}}-\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}-\frac{\sqrt{21}}{3}=\frac{2\sqrt{21}}{21}<1,$$

$$\frac{2\sqrt{21}}{21}>0.$$

2) Эгерде $x-y>1$ болсо, анда (3) системаны

$$\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3, \\ xy=3 \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases} \qquad (5)$$

түрүндө жазабыз. Экинчи теңдемеден $y = \frac{3}{x}$ таап, биринчи теңдемеге коюп,

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

теңдемесине ээ болобуз. Муну

$$x^2 + x^2 - 9x^2 - 9 = 0,$$
$$(x^2+1)\ \ (x^2-9) = 0$$

деп жазабыз. Мында $x^2+1 \neq 0$, анткени $x^2 \neq -1$ болгондуктан, $x^2 - 9 = 0$, $x^2 = 9$, $x = 3\,(x > 0)$, $y = 1$ болот. Демек $x - y > 1$ болгондо, система чыгарылышка ээ болот. $x - y < 0$ болбойт. Ошентип, система эки чыгарылышка ээ болот, б. а.

$$\begin{cases} x_1 = 3\frac{3}{7}, \\ y_1 = \frac{7}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

59. Биз системанын берилишинен дароо белгилеп коюшубуз керек: $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $x > 0$ жана $y > 0$ экендиктерин жана

$$\log_{a^2} x = \frac{1}{2}\log_a x, \ \log_{\sqrt{b}} \sqrt{y} = \log_b y$$

болгондуктан, системаны

$$\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2}\log_a x = 1. \\ b^{\log_b y} + x^2 = 2a \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} 2\log_a x + \log_a x = 2, \\ y + x^2 = a^2 \end{cases} \qquad (1)$$

түрүндө жазабыз, б. а.

$$\begin{cases} 3\log_a x = 2 \\ y + x^2 = a^2 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) системанын биринчи теңдемесинен,

$$x = \sqrt[3]{a^2} \qquad (3)$$

табабыз. Муну (2) нин экинчи тендемесине коёбуз, анда

$$y+\sqrt[3]{a^4}=2a, \quad y=2a-\sqrt[3]{a^4}$$

болот. Эгерде жогорудагы биз көрсөткөн чектөө боюнча $y>0$ болсо, анда $2a-\sqrt[3]{a^4}>0$ болот. Мындан

$$8a^3>a^4, \quad a^3(a-8)<0,$$

$a>0$ болгондуктан, $a^3>0$ болот. Ал эми

$$a-8<0, \quad a<8$$

болот. Ошентип,

$$0<a<1, \ 1<a<8, \ b>0, \ b\neq 1$$

болгон шартта системанын чыгарылышы

$$x=\sqrt[3]{a^2}, \quad y=2a-\sqrt[3]{a^4}$$

болот.

60. Системанын берилиши боюнча $x>0$, ал эми y жана z тер болсо белгилери бирдей, же $y>0$, $z>0$, же $y<0$, $z<0$ (системанын үчүнчү тендемесинен). Эгерде y менен z терс болсо, анда

$$x+y+z>0, \quad x>-(y+z)$$

болушу керек. Ал эми $y>0$, $z>0$ болгондо, $x>0$ болгондуктан

$$x+y+z>0$$

шарты сөзсүз аткарылат. Эгерде

$$3^{x+1}=u, \quad 3^{y+z-x}=v \qquad (1)$$

деп белгилесек, анда системанын биринчи эки тендемеси

$$\begin{aligned} 7u-6v&=9, \\ 2u+v&=27 \end{aligned} \qquad (2)$$

түргө келет. Мындан $u=v=9$ табабыз. Бул маанилерди (1) ге коюп,

$$3^{x+1}=3^2, \quad 3^{y+z-x}=3^2$$

же

$$\begin{cases} x+1=2, \\ y+z-x=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y+z=3 \end{cases} \qquad (3)$$

алабыз.

Эки системанын акыркы тендемеси $lgu=lg(yz)+$ $+lg2$ же $lg(yz)=lg2$, $yz=2$ (4)

болот. (4)нү (3)нүн экинчиси менен бириктирип,

$$\begin{cases} y+z=3, \\ yz=2 \end{cases} \tag{5}$$

системасын алабыз. Бул системаны чыгарып,

$$y_1=1,\ y_2=2;\ z_1=2,\ z_2=1$$

табабыз. Ошентип, системанын эки чыгарылышы болот. Алар:

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1, \\ z_1=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2, \\ z_2=1. \end{cases}$$

61. Системанын эки теңдемесин өз ара бирин экинчисине көбөйтүп,

$$(xy)^{x+y}=(xy)^{2n}$$

алабыз.

Мындан $x>0$, $y>0$ үчүн, $x\neq y\neq 1$ десек,

$$x+y=2n \tag{1}$$

алабыз. Мунун негизинде биринчи теңдемеден (системадан)

$$x^{2n}=y^n,$$

$$y=x^2 \tag{2}$$

табабыз. Муну (1) коюп,

$$x^2+x-2^n=0$$

теңдемесин алабыз. Бул теңдемени чыгарып,

$$x=\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$$

ээ болобуз, Муну (2)ге коюп y тин тиешелүү маанисин табабыз, б. а.

$$y=\frac{1}{4}(\sqrt{8n+1}-1)^2.$$

Эгерде

$$x=y=1$$

десек, анда 1 дагы системанын чыгарылышы болот. Демек, системанын эки анык чыгарылышы бар, б. а.

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-1), \\ y_1=\frac{1}{4}(\sqrt{8n+1}-1)^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=1. \end{cases}$$

62. Системанын экинчи теңдемесин

$$\sqrt[(x-y)]{324} = 2\,(9x^2 + 6xy + y^2)$$

же

$$\sqrt[x-y]{324} = 2\,(3x + y)^2$$

түргө өзгөртүү менен, системаны

$$\begin{cases} (3x + y)^{x-y} = 9, \\ \sqrt[x-y]{324} = 2(3x + y)^2 \end{cases} \qquad (1)$$

түрүндө жазабыз. (1) системанын экинчи теңдемесинен

$$324 = 2^{x-y}\,(3x+y)^{\,2(x-y)} \qquad (2)$$

табабыз. (1) системанын биринчи теңдемесин пайдаланып, б. а. (2) ге $(3x+y)^{(x-y)}$ тин ордуна 9 ду коюп,

$$324 = 2^{x-y} 81,\ \ 4 = 2^{x-y},$$

$$x - y = 2 \qquad (3)$$

алабыз. Муну системанын биринчисине коюп,

$$(3x+y)^2 = 9,\ \ 3x+y = \pm 3 \qquad (4)$$

табабыз. (4) нү (3) менен бириктирип,

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \ (A) \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = -3 \end{cases} \qquad (B)$$

системаларына ээ болобуз. (A) системасын чыгарып алабыз:

$$x_1 = \frac{5}{4},\ \ y_1 = -\frac{3}{4}.$$

(B) системасын чыгарып,

$$x_2 = -\frac{1}{4},\ \ y_2 = -\frac{9}{4}$$

табабыз. Ордуна коюп, текшерүү менен ишенүүгө болот.

63. *Чыгаруунун биринчи жолу.* $x > 0$, $y > 0$ жана $x \neq 1$, $y \neq 1$, эгерде $x = 1$, $y = 1$ болсо, анда $a = b$ болот. Системанын берилишинин шарты боюнча мындай болууга мүмкүн эмес. Системанын ар бир теңдемесин логарифмалап,

$$\begin{cases} y \log x = x \log y, \\ x \log a = y \log b \end{cases} \qquad (1)$$

ээ болобуз. Бул системадан y ти чыгарып таштасак,

$$\frac{\log y}{\log x}=\frac{\log a}{\log b}. \qquad (2)$$

(1) системаны дагы бир жолу логарифмаласак, $\log a>0$, $\log b>0$, деп эсептеп анда $\log x+\log\log a=$ $=\log y+\log\log b$
же

$$\log x-\log y=\log\log b-\log\log a \qquad (3)$$

келип чыгат. Муну (2) менен бириктирип, логарифмалык сызыктуу тендемелердин системасын алабыз, б. а.

$$\begin{cases}\log a\log x-\log b\log y=0,\\ \log x-\log y=\log\log b-\log\log a.\end{cases}$$

$\log b$ га системанын экинчисин көбөйтүп, биринчисин кемитсек жана $\log a$ көбөйтүп, кошсок,

$$(\log b-\log a)\log x=\log\frac{\log b}{\log a}\cdot\log b,$$

$$\log x=\frac{\log\frac{\log b}{\log a}\cdot\log b}{\log b-\log a}=\frac{\log\frac{\log b}{\log a}\cdot\log b}{\log\frac{b}{a}},$$

$$x=c^{\frac{\log\frac{\log b}{\log a}\cdot\log b}{\log\frac{b}{c}}}=c^{\frac{\log_c\frac{\log b}{\log a}}{\log_c\frac{d}{a}}\cdot\log_c b}=$$

$$=c^{\frac{\log_c\frac{\log b}{\log a}}{\log_c c}\cdot\frac{\log_c b}{\log_c\frac{b}{a}}}=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}},$$

$$y=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log\frac{b}{a}}}$$

келип чыгат.
Чыгаруунун экинчи жолу. (1) системадагы экинчи тендемени алабыз:

$$x\log a=y\log b. \qquad (\mathrm{I})$$

Эми

$$x=b^t,\ y=a^z \qquad (\mathrm{II})$$

болсун дейли, анда тендемени

$$b^{yt}=a^{xz}$$

түрүндө жазабыз. (II) теңдемеден $b^y = a^x$ менен алмаштырып,

$$a^{xt} = a^{xz}$$

ти табабыз. Мындан

$$xt = xz,\ x(t-z) = 0,$$

б. а. $x \neq 0$, ошондуктан $z = t$ болот.

Анда $x = b^z$, $y = a^z$ (III)

болот. (III) дөн x, y тин маанилерин (1)ге коюп,

$$b^z \log a = a^z \log b,\ \left(\frac{b}{a}\right)^z = \frac{\log b}{\log a}$$

ны табабыз. Муну логарифмалап,

$$z \log \frac{b}{a} = \log \frac{\log b}{\log a},\quad z = \frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log \frac{b}{a}}$$

ны алабыз. Анда

$$x = b^{\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log \frac{b}{a}}},\quad y = a^{\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log \frac{b}{a}}}.$$

Бул маанилерди жөнөкөйлөтүп, $x = b^{\frac{\log_b \frac{\log b}{\log a}}{\log_b b} \cdot \frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}} =$

$$= \left(b^{\log_b \frac{\log b}{\log a}}\right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}} = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}$$

табабыз. Ушундай эле жол менен

$$y = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}$$

табабыз. Ошентип, $\frac{\log b}{\log a} > 0$ болсо, системанын бир чыгарылышы болот. $\frac{\log b}{\log a} < 0$ болгондо, чыгарылышы болбойт.

Ал эми биз жогоруда 1-чыгарууда токтолгондой $x=y$ болсо, анда $a=b$ болот да, система чексиз көп чыгарылышка ээ болот, y ке же x ке каалагандай маани берип, ага туура келүүчү экинчисинин каалагандай маанисин табабыз.

64. Берилген теңдемелердин ар бирин төмөндөгүдөй өзгөртүп жазабыз:

$$\left(5^{\frac{1}{9}}\right)^{6xy} = 5^8, \; xy = 12. \qquad (1)$$

$$7777^{(x-y-1)(x^2+6y^2-60)} = 7777^0$$

Мындан $(x-y-1)\ x^2+6y^2-60)=0.$

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ x^2+6y^2-60=0 \end{cases} \qquad (2)$$

дү алабыз. Бул (2) барабардыктын ар бирин (1) менен бириктирип, эки система алабыз:

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ xy=12. \end{cases} \quad (A) \qquad \begin{cases} x^2+6y^2-60=0 \\ xy=12. \end{cases} \quad (B)$$

Бул системаларды чыгарып,

$$\begin{cases} x_1=-3, \\ y_1=-4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{3,4}=\pm 6, \\ y_{3,4}=\pm 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{5,6}=\pm 2\sqrt{6} \\ y_{5,6}=\pm\sqrt{6} \end{cases}$$

чыгарылыштарды табабыз.

65. $x>0$, $y>0$ болууга тийиш. Системанын биринчи теңдемесин потенцирлеп,

$$\frac{x}{y}=3, \; x=3y \qquad (1)$$

ти таап, системанын биринчи теңдемесине коюп,

$$(3y)^{\log_3 y} + 2\cdot y^{\log_3(3y)} = 27$$

же

$$y^{1+\log_3 y} + 2y^{1+\log_3 y} = 3^3,$$

$$y^{1+\log_3 y} = 3^2$$

ээ болобуз. Бул теңдемени логарифмалап,

$$\log_3 y^2 + \log_3 y - 2 = 0$$

алабыз. Мындан

$$\log_3 y = -2, \qquad y_1 = \frac{1}{9},$$
$$\log_3 y = 1, \qquad y_2 = 3$$

чыгат. Бул маанилерди ирети менен (1)ге коюп,

$$x_1 = \frac{1}{3}, \; x_2 = 9$$

табабыз. Ошентип,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, \\ y_1 = \frac{1}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

системанын чыгарылыштары экендигин ордуна коюп, текшерип ишенүүгө болот.

66. Мында $x>0$, $y>0$ сандар болууга тийиш. Системаны

$$\begin{cases} 5^{\lg x} = 3^{\lg y}, \\ (3x)^{\lg 3} = (5y)^{\lg 5} \end{cases} \tag{1}$$

түрүндө кайра көчүрүп жазууга болот. Системанын теңдемесинин ар бирин негизи 10 боюнча логарифмалап,

$$\begin{cases} \lg x \lg 5 = \lg y \lg 3, \\ \lg 3 (\lg 3 + \lg x) = \lg 5 (\lg 5 + \lg y) \end{cases} \tag{2}$$

алабыз.

Дагы жөнөкөйлөтсөк, система (2) төмөнкү түргө келет:

$$\begin{cases} \lg 5 \lg x - \lg 3 \lg y = 0, \\ \lg 3 \lg x - \lg 5 \lg y = \lg^2 5 - \lg^2 3. \end{cases}$$

Бул системанын биринчи теңдемесин lg5 ке, экинчисин — lg3 кө көбөйтүп, кошсок,

$$(\lg^2 5 - \lg^2 3) \lg x = -\lg 3 (\lg^2 5 - \lg^2 3),$$

$$\lg x = -\lg 3, \qquad x = \frac{1}{3},$$

ал эми биринчисин $lg3$, экинчисин — $lg5$ ке көбөйтүп, кошсок,

$$(lg^2 5 - lg^2 3)\, lgy = -lg5 \quad (lg^2 5 - lg^2 3),$$

$$lgx = -lg5, \quad y = \frac{1}{5}$$

табабыз. Ошентип, системанын бир гана $\left(\frac{1}{3}, \; \frac{1}{5}\right)$ чыгарылышы бар.

67. Бул системадагыны

$$\begin{cases} 2^x - y > 0, \\ x + y + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} 2^x > y, \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$$

кошсок,

$$2^x+x+1>0$$

болот. Системанын биринчи теңдемесиндеги $2y$ ти дагы $2\cdot 2^x$ менен алмаштырып, $x>0$, $x<0$ болорун аныктайбыз. Анда $y>0$ болот. Системанын экинчи теңдемесин потенцирлеп, алабыз:

$$\begin{aligned} x+y+1&=2^x-y, \\ x+1&=2^x-2y. \end{aligned} \qquad (1)$$

Муну системанын биринчи теңдемеси менен салыштырып,

$$x^2+x+1=1, \ x^2+x=0$$

алабыз. Мындан, $x=0$, $x=-1$ табабыз. Бул маанилерди (1)ге коюп,

$$x=0, \ y=0,$$
$$x=-1, \qquad y=\frac{1}{4}$$

табабыз. Текшерсек, (0; 0) системаны канааттандырбайт. Ошентип, системанын бир гана $\left(-1, \ \frac{1}{4}\right)$ чыгарылышы бар, б. а. $x=-1$, $\quad y=\frac{1}{4}$.

68. Мында $x-y\neq 0$, $x\neq y$, $x+y>0$, $x+y\neq 1$. Эгерде $x+y=1$ болсо, анда $1=3$, же $1=2\sqrt{3}$ болот. Мындай болушу мүмкүн эмес жана $x+y=0$ болот.

Системанын биринчи теңдемесин $x-y$ даражага көтөрүп, экинчисин 2^{y-x}ке бөлүп, системаны

$$\begin{cases} x+y=2^{x-y}\cdot 3^{\frac{1}{2}(x-y)}, \\ x+y=2^{-(y-x)}\cdot 3 \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} x+y=2^{x-y}\cdot 3^{-\frac{1}{2}(x-y)}, \\ x+y=2^{x-y}\cdot 3 \end{cases} \qquad (1)$$

түрүндө жазабыз. Бирин экинчисине бөлүп,

$$1=3^{\frac{1}{2}(x-y)-1}, \ 3^{\frac{1}{2}(x-y)-1}=3^0$$

же

$$x-y-2=0, \ x=y+2 \qquad (2)$$

табабыз. (2) ни (1) нин экинчи теңдемесине коюп,

$$2y+2=2^2\cdot 3, \ y=5$$

алабыз. Бул маанини экинчиге койсок,

$$x=7$$

болот. Ошентип, системанын бир чыгарылышы болот, ал (7,5) саны.

69. a нын кандайдыр бир маанилеринде (x_0, y_0) түгөй сандары системанын чыгарылышы болот. Анткени системанын ар бир теңдемеси x тин ар кандай анык маанилеринде, $y>0$ маанилеринде оң болот. Системанын биринчи теңдемеси боюнча x тин каалагандай анык маанилеринде барабардыктын сол жагы оң, ал эми оң жагы $y>0$ болгондуктан, $a\geqslant 0$ болушу гана керек. Эгерде системанын бир гана анык чыгарылышы болсо, анда $(0, y_0)$ түрүндө болушу зарыл. Анда экинчи теңдеме боюнча (x_0, y_0) түгөй сандарынын бирөө нөл, бирөө ± 1 болушу мүмкүн, б. а. $(0,1)$, $(0, -1)$ дейли. Биринчи теңдемеге $x=0$ жана $y=\pm 1$ коюп, $a=0$ же $a=2$ боло тургандыгын байкоого болот, б. а. эгерде $x=0$, $y=1$ болсо, анда

$$1=1+a,\ a=0,$$

эгерде $x=0$, $y=-1$ болсо, анда

$$1=-1+a,\ a=2$$

болот. a нын бул маанилерин биринчи теңдемеге коюп, теңдемени

$$2^x+|x|=y+x^2,$$
$$y=2^x+|x|(1-|x|) \quad (1)$$

түрүндө жазууга болот. Эгерде (x_0, y_0) системанын чыгарылышы болсо, анда экинчи теңдеме боюнча

$$x_0\leqslant 1,\ y_0\leqslant 1$$

болот эле, ал эми (1) боюнча $y_0\geqslant 1$ болот. Демек, анда $y_0=1$ деген жыйынтык чыгарууга болот. Ошентип, $a=0$ болгондо $x=0$, $y=1$ болгон системанын бир гана чыгарылышы бар. $a=2$ койсок, анда система $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ чыгарылышка ээ болот. Бул бирден көп чыгарылышка ээ болгондуктан, бул учурду албайбыз. Ошентип, $a=0$ болгондо гана система $(0; 1)$ чыгарылыштарга ээ болот.

Экинчи теңдеме боюнча эгерде $x=\pm 1$, $y=0$ болсо, анда бул маанилерди биринчи теңдемеге койсок, анда

$$x=1,\ y=0 \text{ болсо, } a=2,$$
$$x=-1,\ y=0 \text{ болсо, } a=-1\frac{1}{2}$$

болот. Бирок, $a=-1\frac{1}{2}$ канааттандырбай тургандыгын дароо эле көрсөтүүгө болот, $a=2$ болгондо, биринчи теңдеме

$$2^x+x=y+x^2+2$$

түрүндө, экинчиси

$$x^2+y^2=1$$

түрүндө болот. Экинчи боюнча $x_0\leqslant 1$, биринчи боюнча $y_0\leqslant 1$ болгондо, $x_0\leqslant 1$ болот, анда $x=1$, $y=0$ болот.

70. Эгерде a жана b нын кандайдыр бир маанилеринде системанын чыгарылышы (x_0, y_0) эки түгөй сандары болсо, анда $x\neq 0$ болгондуктан, $(x_0,-y_0)$ түгөй сандары дагы системанын чыгарылышы болот. Демек, система бир гана чыгарылышка ээ болсо, анда $(x_0,0)$ болушу зарыл. Ал эми $y=0$ болсо, биринчи теңдемеден $a=0$, экинчи теңдемеден $b>0$ чыгат да, системанын чыгарылышы

$$x_0=\sqrt{b},\ y_0=0$$

болот. Эми биз $a=0$ жана $b>0$ болгондо, $(x_0,\ y_0)$ системанын $y_0=0$ болгон чыгарылышы болобу же болбойбу? Ушуну түшүндүрүшүбүз керек. Эгерде $a=0$ деп эсептесек, анда система:

$$\begin{cases} x^y-1=0, \\ x^2+y^2=b \end{cases} \qquad (1)$$

түрүндө жазылат. $y_0=0$ деп болжолдосок, анда биринчи теңдемеден $x_0=1$, экинчисинен

$$y_0=\pm\sqrt{b-1} \qquad (2)$$

алабыз. Эгерде $b>1$ болсо, анда (2) барабардык эки анык чыгарылышты берет, б. а.

$$y_1=\sqrt{b-1},\ y_2=-\sqrt{b-1}.$$

Бирок маселенин шарты боюнча мындай болууга тийиш эмес, бир гана анык чыгарылышы болуш керек. Ошондуктан $b>1$ эмес. Эгерде $b<1$ болсо, анда (2) ден y_0 мнимый чыгарылышка ээ болот, $(x_0,\ y_0)$ башка. Бул дагы мүмкүн эмес, ошентип $b=1$ болушу керек, бул учурда (1,0) чыгарылышка ээ болот.

71. Эгерде b нын каалаган маанисинде система чыгарылышка ээ боло турган a нын мааниси аныкталса, анда a нын бул мааниси үчүн $b=0$ деп, биринчи теңдемеге коюп,

$$(x^2+1)^a=1 \qquad (1)$$

алабыз. Мында $x=0$, $a=0$, же $x=0$, a — каалагандай сан болушу керек.

Эгерде $a=0$ болсо, система

$$\begin{cases} (b^2+1)^y=1, \\ bxy+x^2y=1 \end{cases} \qquad (2)$$

түрүндө жазылат. (2) нин биринчи теңдемесинен

$$(b^2+1)^y=(b^2+1)^0,$$

$$y=0$$

келип чыгат (b нын ар кандай мааниси үчүн). Бирок бул мүмкүн эмес. Анткени $y=0$ болгондо, (2) системанын экинчи теңдемеси канааттандырылбайт, б. а. $0\neq 1$.

Эгерде $a\neq 0$, $x=0$ болсо, анда система

$$\begin{cases} x^2+(b^2+1)^y=1, \\ xy(b+x)=0 \end{cases} \qquad (3)$$

түрүндө жазылат, анткени берилген системанын экинчи теңдемесинен $a=1$ болот. Ал эми (3) система (0,0) болгон чыгарылышка ээ болот. Ошентип, $a=1$ болгондо, b нын каалаган маанисинде системанын (0,0) барабар бир анык чыгарылышы болот.

72. Эгерде b нын каалаган маанисинде система чыгарылышка ээ боло турган a нын мааниси аныкталса, анда a нын бул маанисинде жана $b=0$ болгондо дагы система чыгарылышка ээ болот. Берилген системанын биринчи теңдемесине $b=0$ койсок,

$$a^2=1,\ a=\pm 1$$

алабыз.

Эгерде $a=1$ болсо, анда система

$$\begin{cases} 2^{bx}+(1+1)by^2=1^2 \\ (1-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} 2^{bx}=1-2by^2, \\ y^3=1 \end{cases} \qquad 1)\ ($$

түргө келет.

Бул системанын экинчи теңдемесинен $y=1$ ди алабыз. Муну (2) нин биринчи теңдемесине коюп,

$$2^{bx}=1-2b$$

теңдемени алабыз. Бул теңдеме b нын каалаган маанисинде эмес,

$$1-2b>0, \text{ б. а. } \quad b<\frac{1}{2}$$

маанисинде гана чыгарылышка ээ болот. Ошондуктан, $a=1$ мүмкүн эмес.
Эгерде $a=-1$ болсо, анда системаны

$$\begin{cases} 2^{bx} = 1 \\ -2x^3+y^3=1 \end{cases} \qquad (2)$$

түрүндө жазууга болот. Бул системаны чыгарабыз. (2) нин биринчи теңдемесинен

$$bx=0, \ x=0, \ b\neq 0$$

табабыз. $x=0$ дү экинчи теңдемеге коюп, $y=1$ ди алабыз. Ошентип, $a=-1$ үчүн, b нын каалаган маанисинде системанын бир гана анык $(0,1)$ чыгарылышы бар.

73. **Биринчи теңдемени негизи *c* боюнча логарифмалайбыз, анда**

$$a\log_c x = b\log_c y \qquad (1)$$

болот. Экинчи теңдемени

$$\log_c x - \log_c y = \frac{\log_c x}{\log_c y} \qquad (2)$$

түрүндө жазабыз. (1) ден

$$\log_c y = \frac{a\log_c x}{b}, \quad \frac{\log_c x}{\log_c y} = \frac{b}{a}$$

ны таап, (2) ге коюп,

$$\log_c x - \frac{b}{a}\log_c x = \frac{b}{a}$$

же

$$\log_c x^{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}, \ x^{1-\frac{a}{b}} = c^{\frac{b}{a}}, \ x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$$

алабыз. Бул маанини берилген системанын биринчи теңдемесине коюп,

$$y = x^{\frac{b}{a}} = c^{\frac{b}{b-a}}$$

алабыз.

74. Берилген беш цифрадан кандайдыр бир беш орундуу 12223 санын түзөлү да, цифралардын ордун мүмкүн болушунча алмаштыралы. Мындай орун алмаштыруунун саны P_5 болот. Бирдей цифралардын ордун алмаштырганда пайда болгон сандар бирдей болушат. Ошондуктан, ар бир санда мындай орун алмаштыруулардын саны P_3 болот, анткени ар бир санда үч бирдей цифра бар. Ошентип, сандын изделүүчү саны

$$N = \frac{P_5}{P_3} = 20.$$

75. Берилген төрт цифрадан түзүлгөн үч орундуу сандарда 2 цифрасы бирөө же экөө болууга тийиш. Биринчиси 1, 2, 3 цифраларынын бардык мүмкүн болгон орун алмаштырууларынан түзүлөт. Экинчиси 1, 2, 2 жана 2, 2, 3 цифраларынын группасынан түзүлөт. Экинчи түзүлгөн сандар бардыгы P_3 болсо, анда ар бир сандарда экинин бирдей цифраларынан орун алмаштыруусунан түзүлгөн бирдей сандар P_2, ошондуктан экинчи сандарды ар түрдүү үч орундуу сандар P_3: $:P_2$ болот. Демек, бардык ар түрдүү үч орундуу сандардын саны

$$M = P_3 + \frac{P_3}{P_2} = 12,$$

76. Жети орундуу сандардын үчөө 2 цифрасын ээлегендиктен, үч экилер C_7^3 жолу тандалып алыныш керек. Ал эми калган ар бир орунга 8 цифранын каалаганын жайгаштырууга болот. Ошонун натыйжасында ар бир мурунку жолдордон дагы 8^4 кө барабар болгон мүмкүндүк келип чыгат. Ошентип

$$N = 8^4 C_7^3 = 143360.$$

77. Томпок көп бурчтуктун чокусу үчөө бир түз сызыкта жатпагандай кылып жайгаштырылган. 10 чекит аркылуу жүргүзүлгөн түз сызыктын саны C_{10}^2 ге барабар (мында, түз сызык өтө турган чекиттердин тартиби эсепке алынбайт). C_{10}^2 санына көп бурчтуктун (10 бурчтуктун) жагы кошо кирген. Ошондуктан

$$n = C_{10}^2 - 10 = 35.$$

78. 5 буюмду үч адамга: 3, 1 жана 1, же 1, 2 жана 2 түрүндө гана бөлүштүрүп берүүгө болот. Ал үчүн эки учур карайбыз: 1) Эгерде биринчи адам үч буюм алса, анда ал аларды C_5^3 жол менен алат. Калган эки буюмду башка экөө эки жол менен бөлүштүрүп алат. Ошентип, эгерде биринчи адам үч буюм алса, анда 5 ар түрдүү буюмду бөлүштүрүүнүн ар түрдүү жолдорунун саны $C_5^3 \cdot 2 = 2C_5^3$.

Бирок үч буюмду экинчиси да, үчүнчүсү да алышы (б. а. үчөөнүн бирөө) мүмкүн. Ошондуктан үчөөнүн бирөө 3 буюмду алса, бөлүштүрүүнүн жалпы жолу

$$3 \cdot 2C_5^3 = 60 \text{ ты түзөт}$$

2) Эгерде биринчи адам бир буюм алса, анда ал саны C_5^1 жол менен алат. Анда калган 4 буюмдун экөөнү экинчиси C_4^2 жол менен, калган эки буюмду үчүнчүсү алат. Ошентип, эгерде биринчиси бир буюм алса, анда буюмду бөлүштүрүүнүн жолунун саны

$$C_5^1 \cdot C_4^2$$

болот. Бирок бир буюмду же экинчиси, же үчүнчүсү да алышы мүмкүн. Ошондуктан бөлүштүрүүнүн жолунун саны бул учурда

$$3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 = 90$$

болот. Ошентип, бардык бөлүштүрүүнүн жолунун саны

$$6\,C_5^3 + 3C_5^1 \cdot C_4^2 = 150 \text{ нү түзөт}$$

79. Топтоштуруунун саны $C_{15}^3 = 455$, бул номерлеринин мүмкүн болгон комбинациясынын саны болот.

80. 50! санында 5 ке бөлүнүүчү 10 бөлүүчүсү бар:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

Ар бир 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45 сандарында 5 бир гана жолу, ал эми 25, 50 сандарында эки жолу кирет. Ошентип, 50 санын жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө ажыратканда анда 12 жолу 5 болот.

2 санынын көбөйтүндүсү 50! санында 12 ден алда канча көп болот, б. а.

$$50! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ \ldots \ 45 \cdot \ldots \cdot 50.$$

$$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 50 =$$
$$= 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 =$$
$$= 5^{12} \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 7 = 5^{12} \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 7. \qquad (1)$$
$$2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{15}, \qquad (2)$$

мындан башка дагы 2 саны кирген көбөйтүүчүлөр көп. Ошондуктан $(5 \cdot 2)$ көбөйтүндүсү 12 гана жолу болот. Демек, анда нөл 12 болот. Ошентип, 50! санынын акыры 12 нөл менен бүтөт.

81. Ар бир чекиттен $(n-1)$ түз сызык жүргүзүүгө болот. Анткени, бардыгы n чекит берилсе, анын бирөөнү алсак, $n-1$ чекит калат да, анын ар бирин тандап алган чекит менен $(n-1)$ түз сызык аркылуу туташтырууга болот. Ошондо n чекитти $(n-1)$ сызык менен туташтырсак, анда бардык түз сызыктардын саны

$$n(n-1)$$

болот. Ал эми биз эсептеген n $(n-1)$ сандагы сызыктын саны сызыктардын эки эселенген саны болот, анткени биз ката кетирбес үчүн мурунку туташтырылган чекит менен кайра дагы туташтырган болобуз, (A менен В ны туташтырсак, кайра B менен A ны туташтырабыз). Ошондуктан

$$\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2$$

барабар болот.

82. Жогорудагы маселе боюнча n чекиттен жүргүзүлгөн түз сызыктардын саны C_n^2 ге барабар. Анда $(n-2)$ чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктардын саны C_{n-2} ге барабар. Берилген чекиттердин каалагандай чекити аркылуу өтүүчү түз сызык калган $(n-2)$ чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктарды кесип өтөт. Ошондуктан ар бир түз сызыктын түз сызыктарды кесип өтүү чекиттери C_{n-2} болот. Ал эми бизде C_n түз сызык бар, ошол үчүн кесип өтүүчү чекиттердин саны

$$C_n^2\cdot C_{n-2}^2$$

ге барабар. Бирок бир кесилишүүчү чекит эки түз сызыкка тиешелүү болгондуктан,

$$N=\frac{1}{2}C_n^2\cdot C_{n-2}^2=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

барабар болот.

83. Биринчиси китептерин алмаштырыш үчүн $C_7^2=21$ жол менен тандап алыш керек. Ал эми экинчиси $C_9^2=36$ жол менен. Ошентип, экөө

$$q=C_7^2\cdot C_9^2=21\cdot 36=756$$

жол менен.

84. Бул цифраларды биз 5 тен орундаштыруубуз керек, анткени бир да жолу кайталанбайт. Ошондуктан

$$N=A_9^5=15120.$$

85. Мында биз 15 кишинин ар бирин 3 төн топтоштурган болобуз. Ошондуктан

$$C_{15}^3=455.$$

86. Бардык 14 предметти күнүнө 6 предметтен окуса, анда 6 күнкү сабактын расписаниесин

$$A_{14}^6=14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$$

жол менен түзүүгө болот. Анткени 6 күндө сабактардын көпчүлүгү кайталанат.

87. Чаек деген сөздөн:

$$P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24.$$

Жумгал деген сөздөн:

$$P_6=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$$

которуштуруп түзүүгө болот.

88. Ньютондун биномунун ажыратуусунун жалпы мүчөсүн табуунун формуласын пайдаланып,

$$T_{k+1}=C_n^k x^{n-k} a^k = C_n^k a^k x^{n-k}$$

боюнча

$$T_{k+1}=C_{12}^k x^{-\frac{1}{2}(12-k)} x^{\frac{k}{3}}=C_{12}^k x^{\frac{5}{6}k-6}$$

табабыз. Эгерде бул мүчө рационалдуу болсо, анда x тин даража көрсөткүчтөрү бүтүн сандар болушу зарыл жана жетиштүү болот. Ошондуктан

$$\frac{5}{6}k-6=p,\ k=\frac{6}{5}(p+1),$$

$$0\leqslant k\leqslant 12,\ \frac{6}{5}(p+1)\leqslant 12$$

болот. Мындан

$$k=p+1+\frac{1}{5}(p+1)$$

келип чыгат. Ал эми $p+1$ саны 5 ке бөлүнүшү керек, себеби k бүтүн сан. Ошон үчүн

$$p=-1,\ 4,\ 9,\ 14,\ \dots$$

болууга тийиш, p нын -1 ден кичине маанилери жарабайт, себеби $k\geqslant 0$ сан, p нын 9 дан чоң маанилери жарабайт, себеби $k\leqslant 12$. Ошентип, $p=-1,4$ жана 9 болгондо, $k=0,\ 6,\ 12$ болот. Анда ажыратуунун рационалдуу мүчөлөрү:

$$k=0 \text{ болгондо } T_1=C_{12}^0 x^{-6}=x^{-6},$$

$$k=6 \text{ болгондо } T_7=C_{12}^6 x^{-1},$$

$$k=12 \text{ болгондо } T_{13}=C_{12}^{12} x^4=x^4.$$

Демек, берилген биномдун ажыратуусунун рационалдуу үч мүчөсү — эки четки жана ортоңку мүчөсү бар.

89. Биномдун ажыратуусунун иррационалдуу болбогон мүчөсү, ажыратуунун рационалдуу мүчөсү болот. Аны Ньютондун биномунун ажыратуусунун

$$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$$

формуласын пайдаланып табабыз. Бул формула боюнча,

$$T_{k+1}=C_7^k(\sqrt{2})^k(\sqrt[3]{3})^{7-k}=C_7^k 2^{\frac{k}{2}}\cdot 3^{\frac{7-k}{3}}$$

барабар болот.

Биномдун ажыратуусунун бул мүчөлөрү рационалдуу болсун үчүн 2 менен 3 түн даража көрсөткүчтөрү бүтүн сан болушу керек, б. а.

$$\frac{k}{2}=t,\quad \frac{7-k}{3}=p,\qquad\text{же}\qquad \begin{cases} k=2, \\ k=7-3p, \\ 0\leqslant k\leqslant 7 \end{cases}$$

$$k=2t,\quad 7-k=3p,$$

болууга тийиш. Бул теңдемелерди чыгарып, p менен t нын маанилерин табабыз. 2 нин даража көрсөткүчү боюнча t жуп сан болушу керек. Анда $t=2$, 4, 6 ж. б. $t>2$ маанилери жарабайт, себеби k саны 7 ден чоң эмес. Экинчи теңдеме боюнча $p=1$ болот да, $k=4$ табылат. Демек, $T_5=C_7^4\cdot 2^2\cdot 3=6\cdot C_7^3=210$.

Ошентип, $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^7$ биномунун ажыратуусунун иррационалдуу болбогон 5-мүчөсү болот да, калган мүчөлөрү иррационалдуу сандар болушат.

90. Ажыратуунун үчүнчү мүчөсүн формуланын негизинде (жалпы мүчөсүн табуунун) же жөн эле ажыратып,

$$10\cdot x^{3+2\lg x}$$

экендигин табабыз. Анда маселенин шарты бюнча

$$10x^{3+2\lg x}=10^6$$

же

$$x^{3+2\lg x}=10^5$$

болот. Негизи 10 боюнча логарифмалап,

$$(3+2\lg x)\lg x=5$$

же

$$2\lg^2 x+3\lg x-5=0$$

дү алабыз. Бул квадраттык теңдемени $\lg x$ ке карата чыгарып,

$$\lg x=1,\qquad x_1=10,$$

$$\lg x=-\frac{5}{2},\quad x_2=10^{-\frac{5}{2}}$$

ни табабыз.

91. *Чыгаруунун биринчи жолу.* Бизге белгилүү көбөйтүүчүлөрүнүн бирөө 3 кө бөлүнгөндө гана көбөйтүндү үчкө бөлүнөт.

Ошондуктан 1, 2, 3, ... 100 сандарынын ичинен үчкө бөлүнүүчү бардык сандарды тандап алабыз. Мындай сандардын бардыгы 33. Калган 67 сан үчкө бөлүнбөйт. Анда 3 кө бөлүнүүчү сандардын көбөйтүндүсүнөн түзүлгөн көбөйтүндүнүн саны C_{33}^{7} барабар. Көбөйтүүчүлөрүнүн бирөө үчкө бөлүнө турган көбөйтүндүнүн саны $67 \cdot 33$ кө барабар. Ошентип, бардык үчкө бөлүнүүчү түгөй көбөйтүндүлөрдүн саны

$$C_{33}^{2} + 67 \cdot 33 = 2739$$

га барабар.

Чыгаруунун экинчи жолу. Бардык эки-экиден көбөйтүндүнүн саны C_{100}^{2} ге барабар, ал эми мунун ичинен 3 кө бөлүнбөй турган эки-экиден көбөйтүндүнүн саны C_{67}^{2} ге барабар. Ошондуктан, үчкө бөлүнүүчү түгөй (же эки-экиден) көбөйтүндүнүн саны

$$C_{100}^{2} - C_{67}^{2} = 4950 - 2211 = 2739$$

га барабар.

92. $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

санынын бөлүүчүсүнүн саны, $p_1, p_2, \dots p_k$ жөнөкөй көбөйтүүчүлөр болсо, анда

$$(1+\alpha_1)\ (1+\alpha_2) \dots (1+\alpha_k)$$

га барабар болот.

93. $n=1$ болгондо, $a_1=a_1$ болот. Демек, формула туура. эми $n=k$ үчүн туура деп болжолдойлу, б. а.

$$a_k = a_1 + d\ (k-1).$$

Д а л и л д ө ө. $n=k+1$ үчүн формуланын тууралыгын далилдейли. $n=k+1$ болсо, анда

$$a_{k+1} + a_k + d = a_1 + d\ (k-1) + d = a_1 + dk$$

болот. Демек, бул учур үчүн да формула туура. Ошентип, n дин каалаган мааниси үчүн формула туура болот, б. а.

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

94. $a=1$ болсо, анда $1-1=0$ болот, демек, нөл p га бөлүнөт. Бул учур үчүн теорема туура. Эми $a=b$ үчүн

$$b^p - b \qquad (1)$$

ны p га бөлүнөт деп болжолдоп, $a=b+1$ деп алып,

$$(b+1)^p-(b+1) \qquad (2)$$

дин p га бөлүнө тургандыгын далилдейли. Ньютондун биномунун формуласы боюнча (2) барабардыктагы айырманын биринчи мүчөсүн ажыратып жазып,

$$(b+1)^p-(b+1)=b^p+pb^{p-1}+C_p^2b^{p-2}+\ldots+pb+1-b-$$
$$-1=(b^p-b)+pb^{p-1}+C_p^2b^{p-2}+\ldots C_p^{p-2}b^2+pb \qquad (3)$$

га ээ болобуз. Болжолдоо (1) боюнча (3) суммадагы биринчи мүчө (b^p-b) саны p га бөлүнөт. Ал эми бардык биномалдык коэффициенттерди карап көрөлү. k-ны биномалдык коэффициенти

$$C_p^k=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$$

деп жазалы. Мындан биз бардык биномалдык коэффициентте p га барабар көбөйтүүчү бар экендигин көрүп турабыз. Ошондуктан биномалдык бардык коэффициенттер p га бөлүнөт. Демек, (3) сумма p га бөлүнөт. Ошентип, a нын каалаган бүтүн маанисинде a^p-a саны p жөнөкөй санына бөлүнөт.

95. Берилген барабардыктын сол жагындагы сумманы S_n деп алалы, б. а.

$$S_n=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}.$$

Эгерде $n=1$ болсо, анда сол жагы

$$S_1=\frac{1}{(a+1)},$$

ал эми оң жагы да $\frac{1}{a(a+1)}$ барабар болот. Ошентип,

$$S_1=\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}.$$

$n=k$ үчүн

$$S_k=\frac{k}{a(a+k)}$$

туура деп болжолдоп, $n=k+1$ үчүн

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{a[a+(k+1)]}$$

экендигин далилдейбиз. Чындыгында

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$=\frac{ak+k^2+k+a}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a[a+(k+1)]}$$

болот. Демек, $n=k+1$ үчүн далилденди. Ошентип, n дин ар кандай натуралдык мааниси үчүн барабардык аткарылат.

96. Берилген барабардыктын сол жагын S_n менен белгилеп алалы, б. а.

$$S_n=\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^4}+\frac{4}{1-x^8}+\ldots+\frac{2^n}{1-x^{2n}}.$$

Эгерде $n=1$ десек, анда сол жагы

$$S_1=\frac{1}{1-x^2}$$

болот. Оң жагы да $\frac{1}{1-x^2}$ болот.

$n=k$ болгондо туура деп болжолдойлу, б. а.

$$S_k=\frac{1}{1-x}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2n+1}}.$$

$n=k+1$ үчүн далилдөө талап кылынат.
Чындыгында

$$S_{k+1}=S_k+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2k+1}}=\frac{1}{1-x}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2k+1}}+$$

$$+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2k+1}}=\frac{1}{1-x}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2k-1}}$$

болот. Демек, $n=k+1$ үчүн далилденди. Эми n дин каалагандай натуралдык мааниси үчүн барабардык аткарылат деген жыйынтыкка келебиз.

97. Барабардыктын сол жагындагы көбөйтүндүнү P_n, оң жагындагы сумманы S_n деп, б. а.

$$P_n=(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}}),$$

$$S_n=1+x+x^4+\ldots+x^{2^{n-1}},\ P_n=S_n$$

деп белгилейли. Эгерде $n=1$ болсо, анда $P_1=1+x$, $S_1=1+x$ болот. Демек, $1+x=1+x$ барабар болгондуктан, $n=1$ болгондо туура. Ал эми $n=k$ болгондогуну туура деп, б. а.

$$P_k=(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{k-1}}),$$

$$S_k=1+x+x^2+\ldots+x^{2^{k-1}},\ \text{же}\ P_k=S_k$$

туура деп болжолдойлу. Анда $n=k+1$ үчүн барабардыктын тууралыгын, б. а.

$$P_{k+1}+S_{k+1}$$

же

$$P_{k+1}=(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k}),$$
$$S_{k+1}=1+x+x^2+\dots+x^{2^{k-1}}+x^{2^k}$$

экендигин далилдейли. Чындыгында $n=k+1$ болгондо

$$P_{k+1}=P_k(1+x^{2^k})=S_k(1+x^{2^k})=(1+x+x^2+\dots+$$
$$+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k})=1+x+x^2+\dots+x^{2^{k-1}}x^{2^k}=1+x+$$
$$+x^2+x^{2^{k-1}+2^k}=1+x+x^{2^{k-1}+2^k}=1+x+x^2+x^{2^k}$$

болот. Демек барабардык далилденди.

98. Суунун ылдамдыгы v га, ал эми акпай турган суудагы моторлуу кайыктын ылдамдыгы x болсун дейли. Анда моторлуу кайыктын агымга каршы ылдамдыгы (жогору карай) $x-v$, суунун агымы боюнча ылдамдыгы $x+v$ га барабар болот. A жана B пункттарынын арасындагы аралыкты S дейли. Анда маселенин шарты боюнча төмөндөгүдөй теңдеме түзөбүз: суунун ылдамдыгы салдын ылдамдыгы болуп эсептелет. Ошондуктан, жолугушканга чейин сал $v\cdot a$ км, моторлуу кайык $(x-v)$ a км аралык өтөт. Экөө биригип,

$$va+1\ (x-v)\ a=s \tag{1}$$

аралык өтөт. Ал эми кайык агымга каршы $\frac{s}{x-v}$ саат жана агым боюнча $\frac{s}{x+v}$ саат жүрсө, сал $\frac{s}{v}$ саат гана жол жүрөт. Ошентип, моторлуу кайык канча убакытта A дан B га барып келсе, ошончо убакта сал B дан A га жетет, б. а.

$$\frac{s}{x-v}+\frac{s}{x+v}=\frac{s}{v}.$$

Демек,

$$\begin{cases} \frac{s}{x-v}+\frac{s}{x+v}=\frac{s}{v}, \\ (x-v)a+va=s \end{cases} \tag{2}$$

системаны алабыз. Биринчи теңдемеден

$$\left(\frac{x}{v}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{v}\right) - 1 = 0.$$

$$\left(\frac{x}{v}\right)_1 = 1 + \sqrt{2}, \left(\frac{x}{v}\right)_2 = 1 - \sqrt{2}$$

табабыз. Маселенин шарты боюнча $x > v > 0$. Ошон үчүн экинчи тамыр жарабайт. (1) теңдемеден $ax = s$ чыгат. Анда

$$\frac{s}{v} = \frac{ax}{v} = a(1 + \sqrt{2}) \text{ саат}.$$

99. x га/саат — биринчи бригаданын өндүрүмдүүлүгү, y га/саат — экинчи бригаданын өндүрүмдүүлүгү дейли. Анда

$$117\ (x+y) = 234,\ x+y=2$$

болот. 39 га аянтка себүү үчүн бригадаларга $\frac{39}{x}$, $\frac{39}{y}$ саат керек. Демек, бригадалар жогорулатылган темп менен иштешкендиктен,

$$\left(t - \frac{39}{x}\right) \text{ саат жана } \quad \left(t - \frac{39}{y}\right) \text{ саатка}$$

барабар болот. Бул убакыттын ичинде алар

$$234 - 2 \cdot 39 = 156 \text{ (га)}$$

аянтка үрөн себишкен. Ошентип,

$$\left(t - \frac{39}{x}\right)\left(x + \frac{25}{4}\right) + \left(t - \frac{39}{y}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) = 156.$$

$y = 2 - x$ коюп, жөнөкөйлөткөндөн кийин,

$$\frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} = t - 24$$

алабыз. Эгерде $t = 55$ болсо, анда

$$31x^2 - 81x + 50 = 0$$

теңдемесин алабыз. Мындан

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{50}{31};\quad y_1 = 1,\ y_2 = \frac{12}{31}.$$

Эгерде $x = \frac{50}{31}$, $y = \frac{12}{31}$ болсо, 39 га аянтты себүү үчүн экинчи бригадага

$$\frac{39 \cdot 31}{12} = 100\frac{3}{4} \text{ (саат)}$$

керек болот. Бул маселенин шартына каршы келет. Ошон үчүн

$$x=y=1 \text{ (га/саат)}$$

маселенин шартын канааттандырат. Эми t нын маанисин аныктайбыз. Ал үчүн t нын кандай маанисинде

$$\begin{cases} \frac{25}{x}+\frac{6}{2-x}=t-24, \\ 0<x<2, \\ t>\frac{39}{x}, \\ t>\frac{39}{2-x} \end{cases} \qquad (1)$$

система чыгарылышка ээ болот? x тин бардык мүмкүн болгон маанилерин табабыз. $t>\frac{39}{x}$ барабарсыздыгы, биринчи теңдемени эсепке алсак,

$$\frac{25}{x}+\frac{6}{2-x}>\frac{39}{x}-24$$

барабарсыздыгы менен эквиваленттүү. Ал эми $6<$ $<x<2$ барабарсыздыгын эсепке алуу менен,

$$6x^2-17x+7>0$$

барабарсыздыгын алабыз. Мындан,

$$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}$$

табабыз, бирок $x<2$ болгондуктан:

$$\frac{1}{2}<x<2 \qquad (2)$$

болот. Ушул сыяктуу эле $t>\frac{39}{2-x}$ барабарсыздыгы, биринчи теңдемени эсепке алсак,

$$\frac{25}{x}+\frac{6}{2-x}>\frac{39}{2-x}-24$$

менен эквиваленттүү. $0<x<2$ эсепке алсак,

$$12x^2+5x-25<0$$

болот. Мындан

$$-\frac{5}{3}<x<\frac{5}{4}$$

алабыз. Бирок $x>0$ болгондуктан,

$$0<x<\frac{5}{4} \qquad (3)$$

ошентип, жыйынтыктаганда (2) менен (3) дөн

$$\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4} \qquad (4)$$

табабыз. Тескерисинче, эгерде x **формула (4) нү ка**нааттандырса, анда

$$t=\frac{25}{x}+\frac{6}{2-x}+24$$

деп алсак, ал (1) системаны канааттандырууга тийиш.

Эми $t=f(x)=\frac{25}{x}+\frac{6}{2-x}+24$ функциясынын

$-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}$ маанилерин табуу керек. Биз ушул интервалда $f(x)$ функциясы монотондуу кемий тургандыгын көрсөтүүгө тийишпиз.

$$f(x_1)-f(_2)=\frac{x_1-x_2}{x_1\cdot x_2(2-x_1)(2-x_2)}=(19x_1x_2-50(x_1+x_2)+$$

$$+100),\ 19x_1x_2-50(x_1+x_2)+100=19\left(\frac{50}{19}-x_1\right)\left(\frac{50}{19}-x_2\right)-$$

$$-\frac{600}{19}>19\left(\frac{50}{19}-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{600}{19}>0.$$

Анда $f(x_1)-f(x_2)<0$. Демек, $f(x)$

$$t_{min}=f\left(\frac{5}{4}\right)=52 \text{ (саат)}$$

деп,

$$t_{max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=78 \text{ (саат)}$$

чейин өзгөрөт. Демек, бригадалардын эмгек өндүрүмдүүлүгү бирдей

$$x=y=1 \text{ га/саат}$$

жана

$$52 \text{ сааттан} < t < 78 \text{ сааттан.}$$

100. M жана m — тынч турган жана кыймылдагы шардын массасы, v_0 жана v_1 — кыймылдагы шардын баштапкы жана акыркы ылдамдыгы, v_x — тынч турган шардын акыркы ылдамдыгы болсун дейли. Маселенин шарты жана кыймыл санынын сакталуу закону боюнча алабыз:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}mv_0^2 = Mv_x^2 + mv_1^2\,, \\ mv_0 = Mv_x + mv_1, \\ v_x > v_1 > \frac{1}{2}v_0 > 0. \end{cases}$$

$$x = \frac{v_1}{v_0}, \quad y = \frac{v_x}{v_0}, \quad t = \frac{m}{M}$$

деп белгилейли, анда система

$$\begin{cases} \frac{3}{4}t = y^2 + tx^2, \\ y = t(1-x), \\ y \geqslant x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

түргө келет. Системадан y ти чыгарып таштасак, x ке карата

$$(t+1)x^2 - 2tx + \left(t - \frac{3}{4}\right) = 0$$

теңдемени алабыз. Мындан

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \frac{1}{2}\sqrt{3-t}}{t+1}; \quad y_{1,2} = \frac{t(1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{3-t})}{t+1}$$

келип чыгат. Ошентип, $t \leqslant 3$ деп чектөөгө болот. Физикалык жактан, согуунун ар кандай учурунда массаларынын эң чоң катышы ($t > 3$) кезинде да энергиянын 25% и жоголбойт дегенди билгизет. $y \geqslant x$ шарттан, радикалдын астындагы төмөнкү белги да жарайт. Эми $x \geqslant \frac{1}{2}$ дегенди канааттандыра турган $t > 0$ болгон

$$t^2 - t - 2 \geqslant 0$$

гана шарт калды. Бул боюнча $t \geqslant 2$.
Ошентип,

$$2 \leqslant t \leqslant 3.$$

Мындан

$$2 \leqslant \frac{m}{M} \leqslant 3$$

табабыз.

101. Килемдердин узундуктарын d_1 жана d_2 дейли. h

жана l дин ар бири биринчи тепкичте 26 барабар бөлүккө бөлүнгөндүктөн ар бир бөлүгүнө $\frac{h}{26}$ жана $\frac{l}{26}$ м ден килем кетсе, 26 тепкичтин ар бирине

$$\frac{h}{26}+\frac{l}{26}\text{ м}$$

ден кетет. Анда баарына

$$d_1=\left(\frac{h}{26}+\frac{l}{26}\right)\cdot 26=h+l.$$

Экинчиси да ушул сыяктуу эле

$$d_2=\left(\frac{h}{20}+\frac{l}{20}\right)\cdot 20=h+l.$$

Демек, $d_1=d_2$.

102. Ондук бөлчөктү y деп белгилейли. Шарт боюнча

$$x^2y=x^2\times 0,\ \ldots$$

болот. Ката басуу боюнча

$$x\times 20,\ \ldots\ =x(20+y)$$

болот. Эки учурда тең жыйынтыгы бирдей болгондуктан

$$x^2y=x(20+y)$$

деп жазабыз. Мындан

$$y=\frac{20}{x-1},\quad x=0. \tag{1}$$

(1) бөлчөк чектелген болсун үчүн, бөлчөктүн бөлүмү эки менен 5 тин көбөйтүндүсү болууга тийиш. Маселенин шарты боюнча x жуп сан болгондуктан $x-1$ так сан болот да, $x-1$ саны 5тин гана көбөйтүндүсүнө ажырайт. Демек,

$$x-1=5^n$$

болмок. Маселенин шарты боюнча x төрт орундуу сан болгондуктан төрт орундуу санды бере турган 5 тин көбөйтүндүсү 5 тин 4 төн чоң жана 6 дан кичине даражасы болот, анткени $5^4=625$, $5^6=5^4\cdot 5^2=$ $=625\cdot 25$ алты орундуу сан болот. Ошентип,

$$x-1=5^5\cdot x=5^5+1,\ \ x=3126$$

болот. Анда

$$y=0,\ 0064.$$

103. Берилген үч цифра x, y жана z болсун дейли. Маселенин шарты боюнча $x>y>z$. Үч орундан ар кандай комбинация түзүлгөн сандардын саны, үч элементтен орун алмаштыруунун санына барабар.

$$p_3 = 3! = 6,$$

б. а.

$$xyz,\ xzy,\ zxy,\ zyx,\ yzx,\ zxy.$$

Маселенин шарты боюнча

$$xyz + xzy + zyx + yxz + yzx + zxy = 286,$$
$$xyz - zyx = 495.$$

Ушул системаны чыгаруу менен изделүүчү цифраны табабыз. Биринчи тендемеде ар бир цифра 6 жолдон (эки жолу жүздүк, эки жолу ондук, эки жолу бирдик) катышат. Ошондуктан биринчи тендемени:

$$2x \cdot 100 + 2x \cdot 10 + 2x + 2y \cdot 100 + 2y \cdot 10 + 2y + 2z \cdot 100 + $$
$$+ 2z \cdot 10 + 2z = 2880.$$

$$222x + 222y + 222z = 2880,$$
$$222(x + y + z) = 2880,$$
$$x + y + z = 13 \qquad (1)$$

жазууга болот. Ошондой эле экинчи тендемени

$$100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 495,$$
$$99x - 99z = 495,$$
$$99(x - y) = 495,$$
$$x - z = 5. \qquad (2)$$

Мындан

$$x = z + 5$$

деп алып, (1) коюп

$$z + 5 + y + z = 13,$$
$$y = 8 - 2z = 2(4 - z) \qquad (3)$$

табабыз. $z \neq 0$, себеби маселенин шарты боюнча бир да цифра нөлгө барабар эмес жана $z \neq 4$ кө, анткени $z = 4$ болсо, $y = 0$ болот. (3) барабардыктан көрүнүп тургандай y жуп сан жана $0 < z < 4$ болот. Эгерде $z = 1$ болсо, $y = 6$, $x = 6$ болот. Бул $y > x$ шартын канааттандырбайт. Ошон үчүн $z = 1$, $z = 3$ болсун дейли, анда $y = 2$, $x = 8$ болот. Бул дагы мүмкүн эмес, себеби $y > z$ шарты канааттандырбайт. Ошондуктан,

$$z = 2;\ y = 4,\ x = 7$$

болот. Демек, изделүүчү цифралар 2; 4; 7.

104. Берилген санды xy дейли да,

$$xyz = 100x + 10y + z$$

деп жазалы. Маселенин шарты боюнча тийинди эки орундуу $x_1 y_1$ саны болот да, мында

$$x_1 = x - 3; \quad y_1 = z + 4$$

болот. Анда

$$x_1 y_1 = (x-3)(z+4) = 10(x-3) + z + 4 = 10x + z - 26.$$

Изделүүчү сандын цифраларынын суммасы

$$x_2 y_2 = x + y + z,$$

Маселенин шарты боюнча $y_2 = x$ **болгондуктан, санды**

$$x + y + z = x_2 x = 10x_2 + x$$

деп жазууга болот. Мындан

$$y + z = 10x_2$$

алабыз. Демек, $y+z$ саны 10го бөлүнүүгө тийиш. Ал эми $y+z$ саны 10 го бөлүнсүн үчүн сумма же 20 же 10 болушу керек. y менен z тин суммасы 20 боло албайт, анткени булардын эң чоң суммасы 18 гана арaң болот. Себеби

$$0 < y \leqslant 9, \quad 0 < z \leqslant 9.$$

Анда

$$0 < y + z \leqslant 18$$

болот. Ошентип, $y + z = 10$ болот. Демек, анда $x_2 = 1$ келип чыгат. Мындан

$$z = 10 - y$$

табабыз. Маселенин шарты боюнча берилген санды

$$100x + 10y + z = (10x + z - 26(x + y + z)$$

же

$$100x + 10y + z = (10x + z - 26)(10x_2 + x) \cdot$$
$$100x + 10y + z = (10x + z - 26)(10 + x)$$

деп жазууга болот. z тин маанисин коюп, жөнөкөйлөткөндөн кийин

$$(19 + x)y = 10x^2 - 16x - 170,$$

$$y = \frac{10x^2 - 16x - 170}{19 + x}$$

алабыз. Бул туюнтма бүтүн сан болууга тийиш. Себеби y цифра. Демек, $10x^2 - 16x - 170$ тин $19 + x$ ке бөлүнүшү керек. Маселенин шарты боюнча $0 < x < 9$ болот. x тин бул маанилеринде $19 + x > 0$ болот. Демек, анда бөлчөк оң болсун үчүн

$$10x^2 - 16x - 170 > 0$$

болушу керек. $D=441>0$, $x_1=5$ жана $x_2=-\frac{17}{5}$. $x_2=-\frac{17}{5}$ жарабайт. Себеби $0<x\leqslant 9$ шартын канааттандыра албайт. Ошондуктан $x=5$ болот. Ошентип,

$$5<x\leqslant 9$$

болот. Демек,

$$x=\{6, 7, 8, 9,\}.$$

Эгерде $x=6$ ны алсак, анда y бөлчөктүү сан болот. Эгерде $x=8$ деп алсак, анда $y>9$, $x=9$ болсо, $y>9$ болот. Мындай болууга мүмкүн эмес. Эми $x=7$ болсо, $y=8$ жана $z=2$ болот. Демек, изделүүчү сан 782.

105. Залда 100гө жакын стул болсо, демек, 100дөн аз, бирок 100дөн көп эмес стул болгон. Ошондуктан залдагы бардык стулдардын санын x дейли. Эки эселенгенде $2x$ болот. Мунун $\frac{11}{12}$ бөлүгүнө киши олтурган болсо, анда бардыгы

$$\frac{11}{12}\cdot 2x=\frac{22}{12}x$$

орунду окуучулар ээлеген болот. Ал эми маселенин шарты боюнча 100гө жакын сандардын ичинен 12 ге бөлүнө турганы 96 жана андан кичинеси 84 саны болот. Бирок 84 саны өтө эле кичине. Ошондуктан 96 санын алабыз. Демек, $x=96$ болсо, анда слетко

$$\frac{22}{12}\cdot 96=176$$

окуучу келген.

106. Жүз жылда күндү, айды жана жылдын акыркы эки цифрасын бир гана цифра менен жазууга боло турган учурларды түшүнүү кыйын эмес. Бир жүз жылда, мисалы, 2·2·22 деп жазуу же 6. 6. 66 деп жазуу 2-февраль 1922-жыл же 6-июнь 1966-жыл дегенди түшүндүрөт. Биз жүз жылда 6-ай жана 6 күн көп, бирок 66 жыл бирөө гана экенин билебиз. Ошентип, бир жүз жылда 6. 6. 66 бирөө гана болот. Демек, анда бардыгы 13 гана жолу жазылат.

107. Эркинбектин жашын

$$ux=10u+x,$$

ал эми анын аталарынын үчөөнүн каалаган бирөөнүн жашын

$$ty = 10t + y$$

десек, анда

$$(10u + x)(10t + y) = (10x + u)(10y + t)$$

алабыз. Муну өзгөртүп,

$$100ut + 10xt + 10uy + xy = 100xy + 10yu + 10xt + ut,$$
$$99xy = 99ut,$$
$$x = \frac{ut}{y}$$

ти алабыз. Маселенин шарты боюнча x, y, u, t лар 0дөн 9га чейинки бүтүн сандар, себеби алар сандардын цифралары болгондуктан, б. а.

$$0 < x \leqslant 9,\ 0 < y \leqslant 9,\ 0 < u \leqslant 9,\ 0 < t \leqslant 9$$

болот. Маселенин үч чыгарылышы болууга мүмкүн: а) Эркинбек 20 жаштан кичине, ошондуктан $u=1$ дейли, анда

$$x = \frac{t}{y}, \quad y \neq 0, \quad t \neq 0$$

болот. Эгерде $t=0$ болсо, $x=0$ болот. Анда Эркинбек 10 до, аталары андан кичүү болуп калат. Ошон үчүн $x \neq y$, $t \neq 0$ болууга тийиш. Ошондуктан, x жана $\frac{t}{y}$ үчүн төмөндөгү таблицаны түзөбүз:

$$x = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

$$\frac{t}{y} = \begin{cases} \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{6}{1} \quad \frac{7}{1} \quad \frac{8}{1} \quad \frac{9}{1}, \\ \frac{4}{2} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{8}{2}, \\ \frac{6}{3} \quad \frac{9}{3}, \\ \frac{8}{4} \end{cases}$$

Маселенин шарты боюнча атасынын, чоң атасынын жана чоң атасынын атасынын жашы жөнүндө жүрүп жаткандыктан, $\frac{t}{y}$ тин үч маанисин алууга болот. Ошондуктан, $x > 3$ маанилерин алып таштайбыз. Себеби $x=3$ болгондо, $\frac{t}{y}$ тин бир же эки гана мааниси алынат да үчүнчүсү болбойт. Ошон үчүн $x=3$

болгон гана маанисин алабыз. Демек, $x=2$ болгондо, $y=1$, $t=2$ болот да, анда Эркинбек 12 жашта, атасы 21 жашта болуп, 9 жашында балалуу болгон. Ошондуктан, $y=1$, $t=2$ жарабайт. Ошон үчүн $y=2$, $t=4$ деп алсак, анда Эркинбек 12 жашта, атасы 42 жашта, чоң атасы 63 жашта жана чоң атасынын атасы 84 жашта болот.

$x=3$ болсо, $y=1$, $t=3$ болот да, Эркинбек 13, атасы 31, чоң атасы 62, чоң атасынын атасы 93 жашта болушат.

Эгерде Эркинбекти 20дан жогорку жашта десек, анда жогорудагыдай эле ой жүгүртүүнүн негизинде Эркинбекти 24, атасын 42, чоң атасын 63, чоң атасынын атасын 84 жашта экендигин $x=\frac{2}{y}$ (мында $u=2$) аркылуу табууга болот, б. а. $u=2$ болсо, таблица $x=4$ болгондо, $\frac{2t}{y}=\frac{4}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{8}{2}$ болот. Маселени экинчи жол менен да чыгарууга болот. Аны окуучуларга сунуш кылабыз.

108. Берилген бөлчөк $\frac{p}{q}$ болсун дейли. Анда маселенин шарты боюнча
$$\frac{p+x}{qx}=\frac{p}{q}$$
болот. Мындан $x=\frac{p}{p-1}$, $x>1$.

Эгерде $x=2$ болсо, $p=2$ болот. Ошентип, бөлчөк $\frac{2}{q}$ болот. Бул бөлчөк $\frac{1}{2}$ ден чоң болсун үчүн $q\geqslant3$ болушу зарыл жана жетиштүү. Демек, бөлчөк $\frac{2}{3}$ болушу жана андан да чоң болушу мүмкүн. Ошон үчүн маселенин чыгарылышынын санын аныктайбыз. Бөлчөк $\frac{2}{3}$ болуп, каалагандай өзгөрүшү үчүн p каалагандай маани албастан x каалагандай маани алышы керек. Ал үчүн $x=\frac{p}{p-1}$ эмес, $p=\frac{x}{x-1}$ менен туюнтулат. Мындан p бүтүн сан болгондуктан, x дайыма $x-1$ ге бөлүнө турган гана маанилерди алышы керек. Мындай маани $x=2$ деген гана бир маанини алат. x тин каалаган маанилеринде $x-1$ ге бөлүнбөйт. Ошондуктан $p=2$ деген бир гана маани болот. Демек $\frac{1}{2}$ ден чоң болгон бөлчөк үчүн $q=3$ болгондогу $\frac{2}{3}$ ге барабар болгон бир гана бөлчөк болот. Ошентип, маселенин бир гана чыгарылышы бар.

109. Биринчи аралашмага жез менен калай салмагы боюнча 3:5 катышында киргендиктен, биринчи аралашманын ар бир граммына $\frac{3}{8}$ г жез, $\frac{5}{8}$ г калай, ошондой эле салмагы боюнча 1:2 катышында кирген экинчи аралашманын $\frac{1}{3}$ г калай, $\frac{2}{3}$ г цинк, үчүнчү аралашмада $\frac{2}{5}$ г жез жана $\frac{3}{5}$ г цинк бар.

Эгерде биз биринчи аралашмадан x г, экинчисинен y г, үчүнчүсүнөн z г алып, аларды аралаштырсак, анда $(x+y+z)$ г жаңы аралашма алабыз. Бирок анда $\left(\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z\right)$ г жез, $\left(\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y\right)$ г калай жана $\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z\right)$ г цинк болот. Биз жаңы аралашмага биринчи, экинчи, үчүнчү аралашмалардан жез, калай, жана цинктердин салмактык катыштары 3:5:2 болгондой, б. а. 1 г жаңы аралашмада $\frac{3}{10}$ г жез, $\frac{5}{10}$ г калай жана $\frac{2}{10}$ г цинк болгондой тандап алууга тийишпиз. Анда $(x+y+z)$ г жаңы аралашмада

$\frac{3(x+y+z)}{10}$ г жез, $\frac{5(x+y+z)}{10}$ г калай жана

$\frac{2(x+y+z)}{10}$ г цинк болот. Ошентип,

$$\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z=\frac{3}{10}(x+y+z);\quad \frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y=\frac{5}{10}(x+y+z);$$

$$\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z=\frac{2}{10}(x+y+z)$$

теңдемелер системасын алабыз. Бул системадан x, y, z ти таппастан эле алардын катыштарын дароо табууга болот. Системанын биринчи эки теңдемесинен $y=27$ ни, ал эми y тин бул маанисин системанын каалаган теңдемесине коюп, $x=\frac{20}{3}z$ ти табууга болот. Демек, $x:y:z=20:6:3$.

Жолдошева Гүлзар.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Математика в школе, 1960—1980-жылдар.
2. Квант, 1976—1981-жылдар.
3. Новоселов С. И. Специальный курс по элементарной алгебре.
4. Моденов Л. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики.
5. Яремчук Ф. П., Рудченко П. А. Алгебра и элементарная функция, 1971.
6. Шахно К. У. Сборник задач по математике.
7. Алгебра жана анализдин башталышы. 9—10-класстар үчүн, бардык басылыштары.

МАЗМУНУ

КИРИШ СӨЗ

Арифметика

Алгебра

Абазкан Аманалиев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(на киргизском языке)

Издательство «Мектеп»

Редактору *А. Рыскелдиев*
Сүрөт редактору *С. Усенов*
Техн. редактору *Б. Алымбаева*
Корректору *Б. Сардарбеков*

ИБ № 3406

Терүүгө 21. 05. 86 берилди. Басууга 28. 10. 87. кол коюлду. № 2 типография кагазы. Кагаздын форматы $84 \times 108^1/_{32}$. Адабий ариби. Жөнөкөй ыкма менен басылды. 2,625 физ. басма табак, 4,41 шарттуу басма табак, 3,4 учёттук басма табак, 4,62 шарттуу боёк түшүрүү. Нускасы 5000. Заказ № 24. Баасы 10 т.

«Мектеп» басмасы.
720361, ГСП, Фрунзе ш., Совет көчөсү, 170.

Кыргыз ССР басма, полиграфия жана китеп соода иштери боюнча мамлекеттик комитети. Кыргыз ССРинин 50 жылдыгы атындагы Кыргызполиграфкомбинаты.
720461, ГСП, Фрунзе, 5, Жигули көчөсү, 102.

10 т.